Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Soluzioni del tutorato numero 12 (25 Maggio 2009)
Esercizi di preparazione al secondo esonero

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo: *http://www.lifedreamers.it/liuck* *http://www.mat.uniroma3.it/*

(Gli esercizi contrassegnati con gli asterischi sono per chi non ha superato il primo esonero e per chi ha intenzione di sostenere direttamente l'appello)

1. (a) Il polinomio caratteristico di F è $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$, abbiamo quindi tre autovalori reali e distinti ($\lambda_i = 0, 1, 3$); l'applicazione risulta quindi essre diagonalizzabile. Un autovettore relativo all'autovalore 0 è $(1, 0, -1)$, quello relativo all'autovalore 1 è $(0, 1, -1)$ mentre il generatore di V_3 è $(1, 0, 2)$. Una base di autovettori di F sarà proprio $b = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 0, 2)\}$, infine come già visto in precedenza si ha che $M_b(F) = M_{be}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{eb}(\mathbb{I})$ con $M_{be}(\mathbb{I}) = M_{eb}(\mathbb{I})^{-1}$ ed $M_{eb}(\mathbb{I})$ è la matrice che ha per colonne i vettori della base b. Quindi $M_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Il polinomio caratteristico di F è $P(\lambda) = \lambda(\lambda - \frac{1}{2})^2)$; per vedere se F è diagonalizzabile basterà verificare se l'autospazio relativo ad $\frac{1}{2}$ ha dimensione 2. Se però consideriamo la matrice $M_e(F) - \frac{1}{2}\mathbb{I}$ vediamo subito che ha rango 2 ossia $V_{\frac{1}{2}}$ ha dimensione 1 (il rango della matrice è la codimensione dell'autospazio), quindi l'applicazione non è diagonalizzabile.

   (c) Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + \frac{8}{3})$ quindi come nel punto precedente basterà guardare la dimensione di V_0; stavolta però il rango di $M_e(F) - 0\mathbb{I} = M_e(F)$ è 1 (ossia la dimensione dell'autospazio è 2), quindi F risulta essere diagonalizzabile, una base per $V_{-\frac{8}{3}}$ è $(1, -2, \frac{1}{3})$ e, sempre risolvendo il sistema una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0 è $(1, 0, 1), (0, 1, -1)$, quindi come nel primo punto dell'esercizio si ha che $M_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. (a) Affinché le due rette siano incidenti, imponiamo innanzi tutto che siano complanari (ricordiamo che la complanarità è condizione necessaria ma non sufficiente affinché siano incidenti), cioè che il determinante della matrice orlata associata al sistema sia nullo: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & h & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2h - 8$, quindi le rette sono complanari $\Leftrightarrow h = 4$; per questo valore, la matrice dei coefficienti 4×3 ha rango 3, quindi le rette sono incidenti, e per trovare il loro punto di intersezione è sufficiente risolvere il sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4y - z = 1 \\ 3x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$, e si trova il punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

   (b) Procediamo come sopra, e troviamo che le rette sono complanari per $h = 1$ oppure $h = 0$; notiamo tuttavia che se $h = 1$ le due rette non sono incidenti ma parallele, in quanto la matrice dei coefficienti del sistema ha rango 2, quindi il valore per cui sono incidenti è $h = 0$; per trovare il punto di intersezione, notiamo che tutti i termini noti del sistema sono uguali a 0, quindi le rette si intersecheranno nel punto $(0, 0, 0)$.

3. (a) Affinché le due rette siano parallele, dobbiamo imporre innanzi tutto che siano complanari (anche in questo caso è una condizione necessaria ma non sufficiente) e, come nel precedente esercizio, imponiamo che si annulli il determinante della matrice 4×4, cioè $0 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$4h-4$, quindi le due rette sono complanari se e solo se $h=1$; per questo valore, la matrice dei coefficienti del sistema ha rango 2 quindi le due rette sono parallele; per trovarne il piano comune, imponiamo che questo appartenga sia al fascio di piani per r che a quello per s, cioè che per opportuni α, β, γ e δ si abbia $\alpha(2x+z+1)+\beta(y-2z)=\gamma(2x+y-z)+\delta(y-2z+1)$: uguagliando i coefficienti delle tre variabili e dei termini noti si ha che $\begin{cases} 2\alpha=2\gamma \\ \beta=\gamma+\delta \\ \alpha-2\beta=-\gamma-2\delta \\ \alpha=\delta \end{cases}$, una soluzione del sistema (ne basta una, le altre saranno tutte proporzionali a questa) è $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \\ \gamma=1 \\ \delta=1 \end{cases}$, quindi il piano che contiene le due rette è $2x+2y-3z+1=0$

(b) Procedendo come sopra, troviamo che le due rette sono complanari per $h=1$ oppure $h=\frac{1}{3}$, ma l'unico valore per cui le rette sono parallele è $h=1$ perchè per $h=\frac{1}{3}$ la matrice dei coefficienti ha rango 3 e quindi le rette sono incidenti; per $h=1$, troviamo il piano che contiene r e s usando lo stesso metodo di sopra e troviamo $x+z+1=0$

4. (a) Essendo la retta s contenuta nel piano π, se r e s sono incidenti, lo saranno anche r e π, e il loro punto di intersezione sara anche il punto di intersezione di r e s: questo punto corrisponderà alle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x-y=3 \\ x-2z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, cioè $P=(1,0,-1)$; dal testo abbiamo inoltre che s contiene il punto $Q(-2,1,1)$, quindi conoscendo due punti di s possiamo facilmente trovarne l'equazione imponendo che $r(\begin{pmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ x_P-x_Q & y_P-y_Q & z_P-z_Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix})=1$; imponendo che si annullino il minore formato dalle prime due colonne e quello formato dalle ultime due troviamo $s: x+3y-1=0=2y-z-1$. (Alternativamente, si poteva scrivere s come l'intersezione tra il piano π e il piano appartenente al fascio per r passante per il punto Q)

(b) Procedendo come sopra, troviamo che $s\cap\pi=(-4,-3,3)$, quindi s è la retta passante per $(1,2,3)$ e $(-4,-3,3)$, quindi $s: x-y+1=0=z-3$.

5. (a) Per calcolare il rango di F, cioè la dimensione della sua immagine, notiamo che quest'ultima è generata dalle immagini dei vettori di una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio quella canonica, quindi $Im(F)=\langle(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\rangle$; essendo questi tre vettori linearmente indipendenti, abbiamo che $r(F)=3$. (Alternativamente, per trovare il rango di F si poteva calcolare la dimensione del nucleo e usare il teorema rango più nullità). Per trovare la matrice che rappresenta F rispetto alle basi canoniche, è sufficiente scrivere in colonna le coordinate dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, quindi $M_{e,e'}(F)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Per trovare la matrice rispetto alle basi a e b invece conviene applicare la formula di cambiamento di base: $M_{b,a}(F)=M_{b,e}(\mathbb{I})\cdot M_{e,e'}(F)\cdot M_{e',a}(\mathbb{I})=(M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1}\cdot M_{e,e'}(F)\cdot M_{e',a}(\mathbb{I})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Calcoliamo il rango di F come nel punto precedente: $r(F)=\dim\langle(1,-1,0,1),(-1,1,0,1),(0,0,0,0)\rangle=\dim\langle(1,-1,0,1),(-1,1,0,1)\rangle=2$; analogamente, troviamo la matrice di F rispetto alle basi canoniche e rispetto alle altre due basi: $M_{e,e'}(F)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{b,a}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $r(F) = \dim\langle(1,1,3,1),(0,0,0,0),(3,-1,1,1)\rangle = \dim\langle(1,1,3,1),(3,-1,1,1)\rangle = 2$; $M_{e,e'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{b,a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Per rappresentare F in forma matriciale, è sufficiente scrivere in colonna le coordinate dei vettori della base canonica: si ha che $M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per trovare gli autovalori, calcoliamo il polinomio caratteristico di questa matrice: $P_F(\lambda) = \det(M_e(F) - \lambda \cdot \mathbb{I}_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - \lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1)^2$. Gli autovalori sono quindi ± 1, entrambi con molteplicità algebrica 2. Determiniamo ora gli autospazi relativi a questi due autovalori: V_1 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \Rightarrow V_1 = \langle X^3 + Y^3, X^2Y + XY^2 \rangle$.

V_{-1} : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \langle X^3 - Y^3, X^2Y - XY^2 \rangle$.

Abbiamo quindi che entrambi gli autospazi hanno dimensione due, quindi F è diagonalizzabile.

* Cerchiamo una base di U nell'insieme dei suoi generatori dato dal testo dell'esercizio: i primi due vettori sono linearmente indipendenti, il terzo è pari alla somma dei primi due mentre il quarto è linearmente indipendente rispetto ai primi due, quindi una base è costituita dal primo, secondo e quarto vettore di quei generatori, ovvero $\{(1,1,0,0),(1,-1,-1,-2),(2,0,-1,-2),(1,2,1,2)\}$. Per completare questo insieme di vettori ad una base di $\mathbb{R}^4$, è sufficiente aggiungere un vettore linearmente indipendente, proviamo per semplicità con quelli della base canonica: $e_1 = (1,0,0,0)$ non va bene, perché è uguale al quarto generatore di U meno il primo più il secondo; neanche $e_2 = (0,1,0,0)$ va bene, perché è uguale a due volte il primo meno il secondo meno il quarto; e_3 invece va bene per completare la base.

Per quanto riguarda V, notiamo che i primi due vettori sono linearmente indipendenti, il terzo è la somma dei primi due e il quarto è due volte il primo meno il secondo, quindi V ha dimensione 2 e una sua base è costituita dai primi due vettori, cioè $\{(1,0,1,0),(1,1,1,0)\}$; proviamo ora a completare questo insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$ usando i vettori della base canonica, come nell'esercizio precedente, facendo però attenzione che questa volta ce ne serviranno due, e non uno solo, perché la dimensione di V è 2, non 3: il primo vettore della base canonica è linearmente indipendente con gli altri due quindi va bene, il secondo non va bene perché è la differenza dei primi due e il terzo neppure perché è uguale al primo generatore di V meno il primo vettore della base canonica, quindi sicuramente il quarto vettore della base canonica andrà bene per completare la base (se così non fosse, avremmo che $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,0,0,0)\rangle$ contiene tutti i vettori della base canonica, che è assurdo visto che ha dimensione 3).

I quattro generatori di W sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base per W e inoltre $W = \mathbb{R}^4$, quindi non cè nulla da completare.

** (a) Calcoliamo innanzi tutto il determinante della matrice dei coefficienti del sistema: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2m + 1$, quindi per $m \neq \frac{1}{2}$ il sistema ha un'unica soluzione, che è $(-\frac{m}{2m-1}, \frac{2m^2}{2m-1}, \frac{m^2}{2m-1})$; se invece $m = \frac{1}{2}$, la matrice orlata ha rango massimo e quindi il sistema è incompatibile.

(b) Ragionando come sopra, troviamo che il determinante della matrice dei coefficienti è $m - m^3$, quindi per $0 \neq m \neq \pm 1$ la soluzione del sistema è unica, ovvero $(0, \frac{2}{1-m}, 1)$; se $m = 0$ ci sono

∞^1 soluzioni del tipo $(t-1, 2t, t)$, se $m = -1$ ci sono anche in questo caso ∞^1 soluzioni, del tipo $(t, \frac{t}{2}+1, 1)$, mentre se $m = 1$ il sistema è incompatibile.

(c) In questo caso, la matrice dei coefficienti non è quadrata, quindi non si può procedere allo stesso identico modo dei due casi precedenti, ma bisognerà studiare il rango di questa matrice: quando questo è uguale a 2, il sistema avrà ∞^1 soluzioni, e ciò accade $\leftrightarrow m \neq 2$, e le soluzioni sono $(\frac{1}{m-2}, \frac{tm-2t-1}{m-2}, t)$, al variare del parametro reale t; se invece $m = 2$, il sistema è incompatibile.