Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2008/2009
GE1 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello B – 16 Luglio 2009

Esercizio 1. Sia $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 1 \\ -X_1 + hX_2 - 2X_3 = -1 \\ hX_1 + X_2 + X_3 = -1 \\ X_2 - 2X_3 = 3 \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Siano X, Y degli $\mathbb{R}-$spazi vettoriali di dimensione 3,4, rispettivamente e siano $\mathcal{X} := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, $\mathcal{Y} := \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4\}$ loro basi. Detta $f : X \longrightarrow Y$ l'unica applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{YX}}(f)$ è la matrice dei coefficienti del sistema in (i), si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(iii) Si usi (i) per determinare i valori di h per cui $f^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 + 3\mathbf{y}_4) \neq \emptyset$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Facendo uso della definizione, si dimostri che l'insieme $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ è linearmente indipendente.

(ii) Dopo aver spiegato perché, per ogni $h \in \mathbb{R}$, esiste un unico endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\varphi(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \varphi(\mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix},$$

si trovi il valore di h per cui φ non è un automorfismo e, per tale valore, si determini una base ed equazioni cartesiane di $\mathrm{Ker}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi)$.

(iii) Per $h = -2$, si stabilisca se φ è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia fissato un riferimento affine.

(i) Nella famiglia di piani di $\mathbb{A}$ di equazione

$$hX + (h+1)Y + Z - h = 0 \qquad h \in \mathbb{R},$$

si trovi l'unico piano $\mathscr{P}$ passante per $P(1, 1, 2)$.

(ii) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta contenuta in $\mathscr{P}$, passante per P e incidente la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X - Y = 0 \\ X + Y + Z = 1 \end{cases}$$

SOLUZIONI

1. (i) La matrice dei coefficienti ha rango 3 per ogni valore reale di h, come si vede calcolando il minore delle ultime 3 righe, il cui determinante e' $2h^2-2h+3$. La matrice orlata ha determinante uguale a $-8h^2-7h+1$, che si annulla per $h=-1, 1/8$. Quindi il sistema e' incompatibile se $h \neq -1, 1/8$. Se $h=-1$ la soluzione e' $(4/7, 9/7, -6/7)$. Se $h=1/8$ la soluzione e' $(4, 0, -3/2)$.

   (ii) Poiche', come gia' osservato nella prima parte, la matrice dell'applicazione f ha rango 3 per ogni h, segue che $N(f)=(0)$ per ogni h reale. Un base dell'immagine e' costituita dai vettori di Y le cui coordinate rispetto alla base assegnata sono le tre colonne della matrice di f.

   (iii) Sono esattamente i valori per i quali il sistema in (i) e' compatibile, cioe' $h = -1, 1/8$.

2. (i) Bisogna verificare, con il metodo di Gauss-Jordan e senza calcolare il rango della matrice costituita dai tre vettori, che il sistema $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ non possiede autosoluzioni.

   (ii) Poiche' $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ costituiscono una base, il teorema n. 11.3, pg. 137 del libro di testo garantisce che φ esiste ed e' unico. Il valore di h cercato e' quello tale che

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & h \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

   cioe' $h=0$. Per tale valore una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$ e' $\{(-2,0,1), (-2,3,-2)\}$. Eq. cartesiana: $X+2Y+2Z=0$. Una base di $N(\varphi)$ e' $\{\mathbf{x_3}\}$. Eq. cartesiane: $X=Z=0$.

   (iii)La matrice di φ rispetto alla base canonica e':

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Il suo polinomio caratteristico e' $-(\lambda+2)^2(\lambda+3)$. La matrice

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

   per $\lambda=-2$ ha rango 2. Pertanto φ non e' diagonalizzabile.

3. (i) $-3X-2Y+Z+3=0$.

   (ii) Cartesiane: $X-Y=0=-3X-2Y+Z+3=0$.

   Parametriche: $X=3/5+t/5,\ Y=3/5+t/5,\ Z=t$.