Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2008/2009
GE1 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello C – 20 Gennaio 2010

Esercizio 1. Sia $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} X + 2Y + Z + W = 2 \\ 2X + Y + Z + 2W = 1 \\ 3X + hY + Z + 2W = 1 + h \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Si determini dimensione e una base del sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato al sistema precedente, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Si dica perché l'insieme $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ è linearmente dipendente, e si determini una combinazione lineare nulla e non banale dei vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$.

(ii) Si determini dimensione e una base del sottospazio $X := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Si dica perché l'applicazione $f : X \longrightarrow X$ tale che $f(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2) := (a+b)\mathbf{x}_1 + (3b-a)\mathbf{x}_2$ è un ben definito endomorfismo di X, e si stabilisca se f è diagonalizzabile.

(iv) Si dica se si può estendere f a un endomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia fissato un riferimento affine. Determinare equazioni cartesiane della retta $\mathscr{L}$ passante per il punto $Q = (1, -1, -1)$ e complanare con le rette di equazioni cartesiane, rispettivamente:

$$\mathscr{R} : \begin{cases} 2X + Y + 1 = 0, \\ -2X + 3Y + Z = 0 \end{cases} \qquad \mathscr{S} : \begin{cases} Y = 2 \\ Z = 1 \end{cases},$$

Stabilire se $\mathscr{L}$ è incidente o parallela a $\mathscr{R}$ e ad $\mathscr{S}$.