corso GE1 - a.a. 07/08

Seconda prova di esonero

1) Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alla base $\mathbf{b} = \{(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

2) Determinare autovettori, autovalori e basi degli autospazi dell'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se F è diagonalizzabile motivando la risposta, ed in caso affermativo determinare una base diagonalizzante e la matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia la matrice di F in tale base.

3) Verificare che le retta di $\mathbf{A}^3/\mathbf{R}$):

$$r : \begin{cases} X + 2Y - Z = 0 \\ X + Y - 3Z = 0 \end{cases}, \qquad \ell : \frac{X-2}{5} = \frac{Y}{-2} = Z + 1$$

sono parallele e determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Soluzioni

1) $M_{\mathbf{Eb}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathbf{bE}} = M_{\mathbf{Eb}}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$M_{\mathbf{E}}(F) = M_{\mathbf{Eb}}\ A\ M_{\mathbf{bE}} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -5 & 13 & -3 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 1$ (con molt. alg. 2), -1. F non è diagonalizzabile.

$$V_1 = \langle (0,1,-1) \rangle, \qquad V_{-1} = \langle (0,1,1) \rangle$$

3) Il piano ha equazione $2X + 7Y + 4Z = 0$.