corso GE1 - a.a. 07/08

Prima prova di esonero

1) Determinare la matrice cofattore della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro reale a. Calcolare i valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ per cui A non è invertibile e determinarne il rango in corrispondenza di tali valori. Nei casi in cui è invertibile calcolarne l'inversa.

2) Verificare che sono linearmente dipendenti le righe della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

e determinare i coefficienti di una loro combinazione lineare non banale uguale a zero.

3) Discutere il seguente sistema a coefficienti reali, in cui a è un parametro reale:

$$\begin{array}{cccc} X_1 & +2X_2 & -X_3 & = & 1 \\ 2X_1 & +2(a-1)X_2 & -2X_3 & = & 2 \\ -X_1 & & -(a-1)X_3 & = & 0 \end{array}$$

determinandone le soluzioni nei casi in cui è compatibile.

4) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^5$:

$$\mathbf{U} = \langle (1,-1,0,1,-1), (-2,2,-1,0,1), (-1,1,-2,3,-1) \rangle$$

$$\mathbf{W} = \langle (0,1,1,-1,1), (1,0,1,0,0), (-2,0,-3,2,-1) \rangle$$

Calcolare $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$, $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$ e loro basi.

Soluzioni

1) Si ha $\det(A) = a^2 - 1$, che si annulla per $a = \pm 1$. Quindi A non è invertibile se e solo se $a = \pm 1$. Entrambi i valori danno luogo a matrici di rango 2.

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} a^2-2 & -a & 1 \\ 3-a^2 & 2a & -2 \\ -a & -1 & a \end{pmatrix}, \qquad A^1 = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a^2-2 & 3-a^2 & -a \\ -a & 2a & -1 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

2) $2(1,1,1,-2) - 3(1,-2,-1,-2) + (1,-8,-5,-2) = (0,0,0,0)$

3) Se $a = 0$ il sistema è incompatibile.
Se $a = 3$ il sistema possiede le ∞^1 soluzioni:

$$\left(-2t, \frac{1+3t}{2}, t\right), \qquad t \in \mathbf{R}$$

Se $a \neq 0, 3$ il sistema possiede l'unica soluzione:

$$\left(1 - \frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right)$$

4) $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 3$, $\dim(U+W) = 3$, $\dim(U \cap W) = 2$. Poiché $\dim(U+W) = 3 = \dim(W)$ si ha $U+W = W$ e $U \subset W$. Quindi una base di $U+W$ è costituita dai generatori di W assegnati. Inoltre $U = U \cap W$ e quindi una sua base è data ad esempio dai primi due generatori di U assegnati, che sono evidentemente non proporzionali e pertanto linearmente indipendenti.