corso GE1 - a.a. 07/08 - Appello X (16/9/08)

1) Siano

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 2, -1) \in \mathbf{R}^3$$

Determinare la matrice rispetto alla base canonica dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{E}_1, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{E}_2, \quad f(u_3) = \mathbf{E}_3$$

dopo aver verificato che f esiste.

2) Discutere il seguente sistema a coefficienti reali, in cui a è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrrcl} X_1 & -X_2 & +2X_3 & = & 1 \\ 2X_1 & -2X_2 & +2(a-1)X_3 & = & 2 \\ -X_1 & -(a-1)X_2 & & = & 0 \end{array}$$

determinandone le soluzioni nei casi in cui è compatibile.

3) Studiare la diagonalizzabilità della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel caso sia diagonalizzabile determinare una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

4) Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia assegnato un riferimento affine. Determinare il valore del parametro reale a per cui le due rette:

$$r : 2X + Y + 2Z - 1 = aX + Y + Z - 10 = 0, \qquad s : \frac{X+3}{2} = \frac{Y+2}{3} = \frac{6-Z}{4}$$

sono incidenti e in tal caso trovare il piano e il punto comuni ad esse.

SOLUZIONI

1)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) $\det(A) = a(a-3)$, quindi per $a \neq 0, 3$ il sistema ammette l'unica soluzione $\left(1 - \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, 0\right)$. Se $a = 3$ il sistema ammette le ∞^1 soluzioni $\left(-2t, t, \frac{1+3t}{2}\right)$. Se $a = 0$ il sistema è incompatibile.

3) È diagonalizzabile. $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(1 - \lambda)^2$. Autospazi:

$$V_0 = \langle (1, -1, 1, 0) \rangle, \quad V_2 = \langle (1, 1, 1, 0) \rangle$$

$$V_1 = \langle (0, 0, 1, 0) \rangle, (0, 0, 0, 1) \rangle$$

4) $a = 3, \quad 13X + 6Y + 11Z = 15, \quad (3, 7, -6).$