corso GE1 - a.a. 06/07
Seconda prova di esonero (11/6/07)

1) Sia $F : M_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione:

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c-d \\ a-b-c-d \end{pmatrix}$$

a) Verificare che F è lineare e determinarne il rango.

b) Determinare la matrice $M_{\mathbf{E},\mathbf{E}}(F)$ di F rispetto alle basi canoniche di $M_2(\mathbf{R})$ e di $\mathbf{R}^3$.

c) Determinare $M_{\mathbf{E},\mathbf{B}}(F)$ dove $\mathbf{E}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e dare la formula di passaggio da $M_{\mathbf{E},\mathbf{E}}(F)$ a $M_{\mathbf{E},\mathbf{B}}(F)$.

2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$$

a) Determinarne il polinomio caratteristico, gli autovalori, basi degli autospazi.

b) Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

3) Sia $O\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ un riferimento affine in uno spazio affine reale $\mathbf{A}$ di dimensione 3. Determinare equazioni cartesiane della retta ℓ passante per il punto $Q(1, -1 - 1)$ e complanare con le rette:

$$r: \ 2X + Y + 1 = 0, \ -2X + 3Y + Z = 0, \qquad s: \ Y = 2, \ Z = 1$$

Stabilire se ℓ è parallela o incidente a r e a s.