Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 2
5 OTTOBRE 2011

1. Dare un esempio di due serie divergenti la cui somma converge.

2. Sia $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ una serie di potenze. Dimostrare che, se $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge ad un R, quest'ultimo è il raggio di convergenza della serie.

3. Sviluppare in serie di potenze nel punto indicato.

   a) $f(z) := \dfrac{1}{z^2 - 2z + 2}$ in $z = 1$ b) $f(z) := \dfrac{1}{(2i + z)^3}$ in $z = 0$

4. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 + i^n) z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 + i^n)^n z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{n^4} z^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} z^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n!}$

5. Siano $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ e $\sum_{n\geq 1} b_n z^n$ due serie di potenze con raggio di convergenza rispettivamente R_1 e R_2. Dimostrare che il raggio di convergenza di $\sum_{n\geq 1} a_n b_n z^n$ è $\geq R_1 R_2$.

6. Sia $H(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe in un aperto $\Omega \neq \varnothing$. Verificare che $H(\Omega)$ è un anello, determinarne gli elementi invertibili e almeno un ideale massimale.

7. Determinare i punti in cui le seguenti funzioni sono olomorfe:

   a) $\exp(z^2)$ b) $\mathrm{Re}(z)$ c) $|z|^2$ d) z^{-1}

   e) $\cos(\mathrm{Re}(z)) + i \sin(\mathrm{Im}(z)^2)$ f) $\ln(|z|) + i \arg(z)$, con $\arg(z) \in [\theta, \theta + 2\pi)$

8. a) Dimostrare che, se esiste un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $z^n = 1$, allora z è sul cerchio unitario.

   b) Dimostrare che, se $\lim_{n\to+\infty} z^n = 1$, allora $z = 1$.

   c) Esistono numeri complessi tali che $\lim_{n\to+\infty} z^n = -1$?

9. Sia $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, tale che non esiste nessun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $z^n = 1$. Dimostrare che per ogni w di norma unitaria esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $z^{n_k} \to w$. Dedurne che l'insieme dei punti limite di $\{\cos(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $[-1, 1]$ per ogni θ che non è un multiplo razionale di π.