Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

Tutorato 8
30 novembre 2011

1. Calcolare i seguenti integrali:
   a) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh(z)}{z^3}\mathrm{d}z$, dove C è il rettangolo di vertici $\pm\pi \pm ei$
   b) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh(z)}\mathrm{d}z$
   c) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin^2(\pi z)}\mathrm{d}z$

   Soluzione.
   a) L'unico punto in cui la funzione non è olomorfa è 0; sviluppando $\cosh(z)$ in serie di potenze si ottiene che il residuo è $\frac{1}{2}$, e quindi l'integrale è πi
   b) $\cosh(z)$ ha quattro zeri nella regione: in $\pm\frac{3}{2}\pi i$ e $\pm\frac{1}{2}\pi i$, e tutti sono poli d'ordine 1 per la funzione.
   $$\lim_{z\to z_0} \frac{z}{\cosh(z)} = \frac{1}{\sinh(z_0)} \tag{1}$$
   e quindi l'integrale è uguale a
   $$2\pi i\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\pi i\right)}{\sinh\left(-\frac{1}{2}\pi i\right)} + \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\pi i\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}\pi i\right)} + \frac{\exp\left(-\frac{3}{2}\pi i\right)}{\sinh\left(-\frac{3}{2}\pi i\right)} + \frac{\exp\left(\frac{3}{2}\pi i\right)}{\sinh\left(\frac{3}{2}\pi i\right)}\right) = -8\pi i \tag{2}$$
   c) Il residuo di $\frac{1}{\sin^2(z)}$ è 0 (vedi tutorato precedente) quindi lo è anche quello di $\frac{1}{\sin^2(\pi z)}$, e l'integrale è 0.

2. Trovare il numero di zeri delle seguenti funzioni nella regione indicata:

   a) $z^4 - 8z^3 + z^2 + z$ in $B_1(0)$
   b) $z^4 - 3z^3 - 1$ in $B_2(0)$
   c) $z^4 - 6z + 4$ in $B_2(0) \setminus B_1(0)$
   d) $4z^4 - 29z^2 + 25$ in $B_3(0) \setminus B_2(0)$
   e) $z^6 - 6z^3 + z^2 - 1$ in $B_2(0) \setminus B_1(0)$

   Soluzione.
   a) Sia $\gamma := \partial B_1(0)$, $\Omega := B_2(0)$, $f(z) := -4z^3$, $g(z) := z^4 - 4z^3 + z^2 + z$. Valgono tutte le ipotesi del teorema di Rouché, infatti f e g sono olomorfe su Ω, $\gamma \sim 0 \bmod \Omega$, $\forall z \in \Omega\setminus\gamma$, $n(\gamma, z) = 0$ o 1 e infine su γ vale che:
   $$|f(z) - g(z)| = |z^4 + z^2 + z| \le 3 < 4 = |-4z^3| = |f(z)|$$

quindi f e g hanno in $B_1(0)$ lo stesso numero di zeri, e poiché f ne ha tre (precisamente uno di ordine tre), anche g avrà in $B_1(0)$ tre zeri.

b) $\gamma := \partial B_2(0)$, $f(z) := z^4$, $g(z) := z^4 - 3z - 1$ e se $z \in \gamma$, allora si ha che:

$$|f(z) - g(z)| = |-3z - 1| \leq 7 < 16 = |z^4| = |f(z)|$$

dunque g in $B_2(0)$ ha quattro zeri.

c) Per trovare gli zeri nella corona, basta trovare gli zeri in $B_2(0)$ e poi sottrarvi quelli in $B_1(0)$. Troviamo prima gli zeri in $B_2(0)$. Se $f(z) = z^4$ e $g(z) = z^4 - 6z + 3$, allora sul bordo di $B_2(0)$ si ha che:

$$|f(z) - g(z)| = |-6z + 3| \leq 15 < 16 = |z^4| = |f(z)|$$

quindi g ha quattro zeri in $B_2(0)$. In $B_1(0)$ osserviamo che g ha uno zero perché se $f(z) := -6z$, sul bordo di $B_1(0)$ vale che:

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 + 3| \leq 4 < 6 = |-6z| = |f(z)|$$

Quindi g nella corona ha tre zeri.

d) Sia $g(z) := 4z^4 - 29z^2 + 25$. Se $f(z) := 4z^4$, lungo $\partial B_3(0)$ si ha che:

$$|f(z) - g(z)| = |-29z^2 + 25| \leq 286 < 324 = |4z^4| = |f(z)|$$

quindi g ha in $B_3(0)$ quattro zeri. Su $\partial B_2(0)$, se $f(z) := -29z^2$, allora:

$$|f(z) - g(z)| = |4z^4 + 25| \leq 89 < 116 = |-29z^2| = |f(z)|$$

dunque, g ha due zeri in $B_2(0)$. Concludiamo che nella corona g ha due zeri.

e) $g(z) := z^6 - 6z^3 + z^2 - 1$. Su $\partial B_2(0)$, prendiamo $f(z) := z^6$. Su $\partial B_1(0)$ invece prendiamo $f(z) := -6z^3$. La conclusione è che g ha in $B_2(0) \setminus B_1(0)$ tre zeri.

3. Per quali valori di k la funzione $f(z) = z^k + \sin(z)$ ammette k zeri in $B_R(0)$?

Soluzione. Una funzione che ha k zeri in $B_R(0)$ (per ogni R) è z^k; l'obiettivo è quindi applicare il teorema di Rouché con $g = z^k$, ovvero è necessario stimare $|\sin(z)|$. Sviluppando in serie

$$|\sin(z)| = \left| \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

Per avere $|f - g| < |g|$ su $B_R(0)$, è sufficiente quindi avere $e^R < R^k$, ovvero $e^R < e^{k \log R}$ (dove log è il logaritmo reale) $\Longrightarrow R < k \log R \Longrightarrow k > \frac{R}{\log(R)}$.

4. Calcolare con il metodo dei residui:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2} \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^n+1}\mathrm{d}x$, $n \geq 2$ pari

e) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\theta}\mathrm{d}\theta$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > |b|$

Soluzione.

a) La strategia consiste nell'integrare su una curva composta dall'intervallo $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza con quel diametro, e poi mandare R all'infinito; sulla semicirconferenza l'integrale tende a 0, mentre la parte sull'intervallo tende all'integrale richiesto. L'integrale sulla curva completa può anche essere calcolato mediante il teorema dei residui: il risultato è dunque $\pi/2$.

b) Stesso metodo dell'integrale precedente; il risultato è $5\pi/144$.

c) Applicando la trasformazione $e^{\theta} = z$, ovvero $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, si ottiene l'integrale $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{2z^3(7+2z^2)}\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{12}$

d) Si ragiona come negli esercizi 1 e 2; il risultato è (ponendo $\xi = \exp\left(\frac{2\pi}{n}\right)$)

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\xi^{i(n-1)} + \ldots + \xi^{i} + 1} \tag{3}$$

e) Stessa strategia dell'esercizio 3; la funzione che si ottiene è $\dfrac{2iz}{z^2+2iaz+b}$, i cui poli sono uno all'interno e uno all'esterno della circonferenza unitaria. Il risultato è $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.