Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 4
19 OTTOBRE 2011

1. Dire quali delle seguenti funzioni sono isomorfismi analitici locali nel punto indicato:

   a) $\sin(z^2)$ in $z = 0$

   b) $(\sin z)^2$ in $z = 0$

   c) $f(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$ in $z = 0$

   d) $f(z) = \sinh(\sinh(z^3))$ in $z = i$

   Soluzione. È sufficiente calcolare la derivata nel punto indicato e verificare se sia diverso da 0: i primi due non sono isomorfismi analitici locali, gli altri due lo sono.

2. Sia log la corrispondenza multivoca. Riconoscere la falsità della tesi trovando l'errore:

$$\log(-z)^2 = \log(z^2) \Rightarrow \log(-z) + \log(-z) = \log z + \log z \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow$$

$$\log(-z) = \log z$$

   Soluzione. L'errore è nel passaggio $\log(-z)+\log(-z) = \log z+\log z \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z$. Infatti, per qualunque numero complesso z, $\log z$ è un insieme (log è multivoca); se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$, naturalmente si ha che $A+B = \{a+b|a \in A, b \in B\}$ e $zA = \{za|a \in A\}$. Quindi, tornando all'errore, non si può affermare che $\log(-z) + \log(-z) = 2\log(-z)$, perché in realtà $\log(-z) + \log(-z) \supset 2\log(-z)$ come si osserva facilmente da quanto detto. Un altro modo per vedere l'errore è, fissando una determinazione $\mathrm{Log}(z)$,

$$\log(z) + \log(z) = \mathrm{Log}(z) + 2i\pi\mathbb{Z} + \mathrm{Log}(z) + 2i\pi\mathbb{Z} = 2\,\mathrm{Log}(z) + 2i\pi\mathbb{Z} \neq$$

$$\neq 2\,\mathrm{Log}(z) + 4i\pi\mathbb{Z} = 2(\mathrm{Log}(z) + 2i\pi\mathbb{Z}) = 2\log(z)$$

3. Determinare uno sviluppo in serie nel punto $a = 1$ di una determinazione della funzione $f(z) = i\log z$ in modo che $f(1) = -2\pi$.

   Soluzione. Sia Log la determinazione principale del logaritmo. Allora Log coincide con il logaritmo reale ln sulla semiretta reale positiva, e

$$\mathrm{Log}(z) = \sum_{n\geq 1} -\frac{(-1)^n(z-1)^n}{n} \tag{1}$$

è il suo sviluppo in 1 (come si può vedere dallo sviluppo $\ln(1-z) = -\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$). Le altre determinazioni si ottiengono aggiungendo $2k\pi i$, per un $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $\mathrm{Log}(1) = 0$, basta prendere $k = -1$ e lo sviluppo è

$$\log(z) = -2\pi i - \sum_{n\geq 1} -\frac{(-1)^n(z-1)^n}{n} \tag{2}$$

4. Dimostrare o trovare un controesempio: se f è analitica in $\mathbb{C}$ e $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora f è iniettiva.

   Soluzione. Ad esempio, l'esponenziale è una funzione periodica ma la sua derivata non è mai nulla.

5. È valido un "principio del minimo" analogo al principio del massimo? (Ovvero: è vero che il modulo di una funzione analitica non assume minimo su una regione?) Se no, quali sono le ipotesi minimali per cui vale?

   Soluzione. No: se infatti z_0 è uno zero per f, allora $|f(z_0)| = 0$ e z_0 è un minimo per il modulo (che non può essere negativo). Aggiungendo l'ipotesi che f non sia mai nulla, il "principio del minimo" vale: per dimostrarlo è sufficiente applicare il principio del massimo a $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, oppure mimare la dimostrazione del principio del massimo prendendo punti più vicini all'origine.

6. Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, con U aperto connesso. Dimostrare che se $\mathrm{Re}(f)$ o $\mathrm{Im}(f)$ hanno un massimo in U allora f è costante.

   Soluzione. Osserviamo che

$$|e^{f(z)}| = |e^{\mathrm{Re}(f(z))+i\,\mathrm{Im}(f(z))}| = e^{\mathrm{Re}(f(z))} \tag{3}$$

   e quindi, se $\mathrm{Re}(f)$ ha un massimo, lo ha anche $|e^f|$; analogamente, $|e^{-if(z)}| = e^{\mathrm{Im}\, z}$ e quindi se $\mathrm{Im}(f)$ ha un massimo lo ha anche $|e^{-if}|$. Ma e^f ed e^{-if} sono funzioni olomorfe, e quindi, per il principio del massimo, sono costanti; di conseguenza lo è anche f.

7. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $|a| = |b| = 1$. Dimostrare che esiste un z di norma unitaria tale che $|z-a||z-b| \geq 1$. Se invece $|a| = |b| = R > 0$, quale analoga disuguaglianza vale per un punto di norma R?

   Soluzione. Sia $f(z) = (z-a)(z-b)$: f è una funzione olomorfa, e $|f(0)| = |ab| = 1$. Consideriamo f come funzione da $\overline{B_1(0)}$: quest'ultimo è un compatto, e quindi ha un massimo, che può essere raggiunto sul bordo oppure all'interno. Se fosse all'interno, poiché f è olomorfa su $B_1(0)$, sarebbe costante; di conseguenza f assume massimo sul bordo. Ma allora esiste un punto z sulla circonferenza unitaria tale che $|f(z)| \geq |f(0)| = 1$.

   Se $|a| = |b| = R$, la stessa dimostrazione prova che c'è un punto sul bordo in cui $|z-a||z-b| \geq R^2$.

8. Sia f una funzione analitica in $B_1(0)$ tale che che $|f(z)| \leq 1$ e $f(0) = 0$. Dimostrare che, se $|f(z)| = |z|$ per un $z \neq 0$ oppure $|f'(0)| = 1$ allora $f(z) = \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ di norma 1.

   Soluzione. Si può ripetere la dimostrazione del lemma di Schwartz (che afferma che, se $|f(z)| \leq 1$ e $f(0) = 0$, allora $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(z)| \leq 1$): definendo $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ per $z \neq 0$ e $g(0) = f'(0)$, si ottiene che g è una funzione olomorfa e $|g(z)| \leq 1$; se ora esiste un punto (diverso da 0) in cui $|f(z)| = |z|$, allora $|g(z)| = 1$, e per il principio del massimo g è costante; analogamente, se $|f'(0)| = 1$, $|g(0)| = 1$ e g è costante. In entrambi i casi, $f(z) = \lambda z$.

9. Sia $|\alpha| < 1$, e sia $\phi_\alpha(z) = \dfrac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$.

   a) Scrivendone l'inversa, verificare che le ϕ_α sono funzioni olomorfe e biunivoche tra $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\alpha}^{-1}\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{-\overline{\alpha}^{-1}\}$
   b) Verificare che le ϕ_α sono automorfismi del disco unitario.
   c) Dimostrare che ogni automorfismo del disco unitario è una trasformazione lineare fratta.
   d) È vero che qualsiasi mappa biiettiva e olomorfa tra due dischi aperti è ancora una trasformazione lineare fratta?

   Soluzione.

   a) Ponendo $w = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, si ottiene $z = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}$; quindi l'inversa di ϕ_α è $\phi_{-\alpha}$. Avendo un'inversa, le ϕ_α sono biunivoche; inoltre è chiaro che ϕ_α è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\alpha}^{-1}\}$, e che la sua inversa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-\overline{\alpha}^{-1}\}$.

   b) Sia $z = e^{it}$ un punto di S^1. Allora

$$|\phi_\alpha(e^{it})| = \left| \frac{e^{it} - \alpha}{1 - \overline{\alpha} e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it} - \alpha}{e^{it}(e^{-it} - \overline{\alpha})} \right| = \left| \frac{e^{it} - \alpha}{e^{it}(\overline{e^{it}} - \overline{\alpha})} \right| =$$

$$= \left| \frac{e^{it} - \alpha}{e^{it}(\overline{e^{it} - \alpha})} \right| = |e^{-it}| \left| \frac{e^{it} - \alpha}{\overline{e^{it} - \alpha}} \right| = 1$$

   e quindi la circonferenza unitaria viene mandata nella circonferenza unitaria. Quest'ultima divide il piano in due componenti connesse (l'interno e l'esterno); poiché ϕ_α è olomorfa, è continua, e quindi le due componenti o rimangono fisse o si scambiano. Ma $\phi_\alpha(0) = -\alpha \in B_1(0)$, e quindi l'interno rimane all'interno. Notiamo inoltre che $|\overline{\alpha}^{-1}| = \frac{1}{|\alpha|} > 1$, e quindi la funzione è olomorfa su $B_1(0)$. Anche la sua inversa ha queste caratteristiche, e se ne conclude che ϕ_α è un automorfismo del disco.

   c) Sia f un automorfismo del disco unitario, e sia $\alpha := f(0)$. Allora $f_1 := \phi_\alpha \circ f$ è ancora un automorfismo del disco, ed è tale che $f_1(0) = \phi_\alpha(\alpha) = 0$; sia g la sua inversa. Applicando il lemma di Schwartz a f_1 si ottiene $|f_1(z)| \leq |z| = |g(f_1(z))|$; ma anche $g(0) = 0$, e quindi si deve avere, per ogni w, $|g(w)| \leq |w|$, ovvero $|g(f_1(z))| \leq |f_1(z)|$, e quindi $|f_1(z)| = |z|$; sempre per il lemma di Schwartz, f_1 deve essere una rotazione, ovvero $f_1(z) = \lambda z$ per un $\lambda \in S^1$; in particolare f_1 è una trasformazione lineare fratta. Quindi anche $f = \phi_\alpha^{-1} \circ f_1 = \phi_{-\alpha} \circ f_1$ è una trasformazione lineare fratta.

d) Sia $f : B_{r_1}(z_1) \longrightarrow B_{r_2}(z_2)$ una funzione olomorfa e biiettiva. Siano $T : B_{r_2}(z_2) \longrightarrow B_1(0)$ tale che $T(z) = \frac{z-z_2}{r_2}$, e $S : B_{r_1}(z_1) \longrightarrow B_1(0)$ tale che $S(z) = \frac{z-z_1}{r_1}$; allora $T \circ f \circ S^{-1}$ è un automorfismo del disco unitario, e quindi (per il punto b) è una trasformazione lineare fratta g. Dunque anche $f = T^{-1} \circ g \circ S$ è una TLF.