Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 3
12 OTTOBRE 2011

1. Verificare che $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ e che $\tanh(z) = -i\tan(iz)$.

   Soluzione. È sufficiente esprimerli in forma esponenziale e ricordare che $-i = \frac{1}{i}$

2. Calcolare i logaritmi di e, i, $-i$, $-1-i$, $3-2i$.

   Soluzione.

   a) $1 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

   b) $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

   c) $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

   d) $\frac{1}{2}\ln(2) + (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

   e) $\frac{1}{2}\ln(13) + (\arctan(\frac{2}{3}) + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Calcolare:

   a) i^i

   b) $i^{\frac{1}{i}}$

   c) 1^i

   d) $(-1)^{\sqrt{2}}$

   e) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

   Soluzione.

   a) $\exp -(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

   b) $\exp(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

   c) $\exp(-2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

   d) $\exp(\sqrt{2}\pi i + 2\sqrt{2}k\pi i)$, $k \in \mathbb{Z}$

   e) $\exp -(\frac{\pi}{2} + 4k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

4. Determinare tutti i numeri complessi z tali che i^z è sempre reale.

   Soluzione. La parte immaginaria di i^z è $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)x$; ponendo $k = 0$ si ottiene la condizione necessaria $x \in 2\mathbb{Z}$, e imponendo questa condizione per k qualunque si ottiene che questa è anche sufficiente.

5. Determinare gli zeri delle seguenti funzioni e i loro rispettivi ordini:

a) $z^2(z-1)$
b) $z(z-1)\sin(\pi z)$
c) $\cos(z)$
d) $\tan(z)$
e) $e^z - 1$

Soluzione.

a) 0, con ordine 2; 1, con ordine 1.
b) 0 e 1, con ordine 2; k, intero e diverso da 0 e 1, con ordine 1.
c) I $\pi + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, con ordine 1.
d) I $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, con ordine 1.
e) I $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, con ordine 1.

6. Trovare due funzioni $f \neq g$, analitiche su un aperto Ω, tali che $f = g$ in un aperto $U \subset \Omega$.

   Soluzione. Basta scegliere una regione costituita da due componenti connesse Ω_1 e Ω_2, e definire f come una funzione costante (e diversa da 0) su Ω_1 e costantemente 0 su Ω_2, e g allo stesso modo ma scambiando Ω_1 e Ω_2.

7. Sia f una funzione analitica su tutto $\mathbb{C}$. Dimostrare che l'insieme dei suoi zeri è al più numerabile.

   Soluzione. Nel disco chiuso $\overline{B_R(0)}$ l'insieme degli zeri è discreto, dunque finito (il disco chiuso è compatto). Ma $\mathbb{C} = \bigcup_{R\in\mathbb{N}} \overline{B_R(0)}$; quindi l'insieme degli zeri è l'unione di una quantità numerabile di insieme finiti, e dunque è (al più) numerabile.

8. Sia f una funzione analitica in U tale che, in ogni espansione $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-w)^n$, almeno uno dei c_n è 0. Dimostrare che f è un polinomio.

   Soluzione. Dire che, nell'espansione in serie di Taylor in w, $c_n = 0$ equivale a dire che $f^{(n)}(w) = 0$ (ovvero l'n-esima derivata è uguale a 0). Sia $A_n := \{z \in \mathbb{C} | f^{(n)}(z) = 0\}$; per ipotesi, ogni $z \in \mathbb{C}$ è in un A_n, e quindi $\bigcup_{n\geq 0} A_n = \mathbb{C}$. Se nessuna derivata fosse identicamente nulla (ovvero se f non fosse un polinomio), ogni A_n sarebbe di cardinalità numerabile (per l'esercizio precedente); ma l'unione di una quantità numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile, mentre $\mathbb{C}$ non lo è. Quindi f deve essere un polinomio.

9. Sia Ω un aperto connesso, $a \in \Omega$; ricordiamo che $H(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni analitiche in Ω. Verificare che l'applicazione naturale $i_a : H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}[[X]]$ che associa ad ogni funzione la sua serie formale in a è un omomorfismo iniettivo di anelli. Dedurne che $H(\Omega)$ è un dominio d'integrità.

10. Spiegare perché e^{e^z} non è definita come serie formale, ma $e^{(e^z-1)}$ lo è.

Soluzione. Perché la serie formale $f \circ h$ sia definita è necessario che $h(0) = 0$, ovvero che l'ordine di h sia ≥ 1: infatti

$$e^{e^z} = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{zn}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(zn)^k}{n!k!}$$

e il coefficiente del termine di grado 0 sarebbe $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!}$, che essendo una ssomma infinita *non è definita* nell'anello delle serie formali.

11. Dimostrare che se f è una serie formale tale che $f' = f$ allora $f = ce^z$ per un $c \in \mathbb{C}$.

    Soluzione. Scrivendo $f = \sum a_n z^n$, si ha $f' = \sum n a_n z^{n-1}$, e dunque $(n+1)a_{n+1} = a_n$; questo implica che la successione $\{a_n\}$ è determinata univocamente da a_0, e che $a_k = \dfrac{1}{1} \cdots \dfrac{1}{k} a_0 = \dfrac{1}{k!} a_0$; dunque $f = a_0 e^z$.

12. Sia $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$. Dimostrare che:

    a) $\dfrac{f(z)}{1-z} = \sum\limits_{n \geq 0} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \right) z^n$

    b) $zf'(z) = \sum\limits_{n \geq 0} n a_n z^n$

    Soluzione.

    a) $\frac{1}{1-z} = \sum_k z_k$; quindi il termine di grado k nella serie di $\frac{f(z)}{1-z}$ è la somma dei termini corrispondenti ai prodotti dei termine di grado 0 e di grado k, di grado 1 e di grado $k-1$ eccetera, che è $\sum_{j=0}^{k} 1 \cdot a_j$.

    b)
    $$f' = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \Longrightarrow zf' = \sum_{n \geq 1} n a_n z^n = \sum_{n \geq 0} n a_n z^n$$

    perché $n a_n|_{n=0} = 0$.