corso AC1 - a.a. 07/08

2^0 esonero

1) Calcolare il seguente integrale:

$$\mathbf{I} = \int_{|z|=2} \frac{z^3}{4+z^4} dz$$

2) Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

3) Determinare il numero di radici del polinomio

$$f(z) = z^6 - 6z^3 + z^2 - 1$$

nella corona circolare $1 < |z| < 2$.

4) Determinare il tipo di singolarità della funzione:

$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{(\sin z^2)^2}$$

in $z_0 = 0$.

SOLUZIONI

1) E' possibile utilizzare il residuo all'infinito perchè tutti i poli della funzione integranda sono contenuti all'interno della circonferenza di integrazione. Si ottiene il valore $\mathbf{I} = 2\pi i$.

2)

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{(x+1+i)^2(x+1-i)^2}$$

Nel semipiano superiore c'è l'unico polo $z_0 = -1+i$. Il residuo in z_0 è:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(x+1+i)^2}\right]_{z_0} = \frac{1}{4i}$$

Quindi $\mathbf{I} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$.

3) Prendendo $g(z) = z^6$ si ottiene

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

in $|z| = 2$, quindi tutte le radici sono contenute nel disco $|z| < 2$. Prendendo $g(z) = -6z^3$ si ottiene

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

in $|z| = 1$, quindi 3 radici sono contenute nel disco $|z| < 1$. Pertanto 3 radici sono contenute nella corona circolare.

4) Polo di ordine 2.