corso AC1 - a.a. 07/08

1^0 esonero

1) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$$

e studiarne la convergenza nei punti $z=\sqrt{2i},-\sqrt{i}$ motivando la risposta.

2) Determinare lo sviluppo in serie di potenze delle funzioni

$$f(z)=\frac{1}{3z+1},\qquad g(z)=\frac{z}{z^2+i}$$

rispettivamente nel punto $z_0=-2$ e $z_0=0$ ed il raggio di convergenza delle due serie.

3) Determinare il più grande aperto in cui la funzione

$$f(z)=\frac{(z^2-\pi^2)^4}{(\sin z)^2}.$$

è definita e analitica. Nei punti $\pm\pi$ studiarne il comportamento (cioè dire se vi è definita, se sono zeri della funzione, eventualmente il loro ordine, e se sia un isomorfismo analitico locale) motivando la risposta.

4) Calcolare l'integrale:

$$\int_C z\ \mathrm{Im}(z^2)dz$$

dove C è la curva $|\mathrm{Im}(z)|\leq 1$, $\Re(z)=1$ percorsa nel verso in cui $\mathrm{Im}(z)$ è crescente.

SOLUZIONI

1) $R=\sqrt{2}$. La serie converge assolutamente nelle due determinazioni di $\sqrt{i}$ perchè appartenenti all'interno del disco di convergenza. Nelle determinazioni di $\sqrt{2i}$ la serie prende la forma

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{n}{2}}$$

il cui termine k-esimo ha modulo uguale a 1. Quindi la serie non converge.

2)

$$\frac{1}{3z+1}=-\frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\frac{3}{5}(z+2)}=$$

$$=-\frac{1}{5}\left[1+\sum_{k\geq 1}\frac{3^k}{5^k}(z+2)^k\right]=-\sum_{k\geq 0}\frac{3^k}{5^{k+1}}(z+2)^k$$

$$\frac{z}{z^2+i}=\frac{z}{i}\,\frac{1}{1+\frac{z^2}{i}}=-iz\,\frac{1}{1-iz^2}$$

$$=-iz\left(\sum_{k\geq 0}(iz^2)^k\right)=-\sum_{k\geq 0}i^{k+1}z^{2k+1},\qquad R=1$$

3) La funzione $f(z)$ è analitica in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore, cioè nei punti $z\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Nei punti $z=\pm\pi$ si annulla anche il numeratore e quindi la funzione potrebbe estendersi a una funzione analitica in questi punti. Osservando che $(z^2-\pi^2)^4=(z-\pi)^4(z+\pi)^4$ e che $O_{\pm\pi}(\sin(z)^2)=2$, vediamo che in un intorno di π: $\sin(z)^2=(z-\pi)^2g(z)$ con $g(z)$ analitica in π e $g(\pi)\neq 0$. Pertanto in un intorno di π si ha:

$$f(z)=(z-\pi)^2(z+\pi)^4g(z)^{-1}$$

che è analitica e ha ordine 2 in π. In particolare l'insieme di definizione di f include anche il punto π. f non è un isomorfismo analitico locale in π. Un'analisi simile può farsi in $-\pi$. Pertanto il più grande aperto in cui f può essere estesa ad una funzione analitica è il complementare di

$$\{\pm k\pi : k\in\mathbb{Z}, k\neq\pm 1\}$$

4) La curva C possiede la parametrizzazione $\gamma(t) = 1 + it$, $t \in [-1, 1]$. Pertanto

$$\int_C z\mathrm{Im}(z^2)dz = \int_{-1}^{1} (1 + it)2tidt = -2\int_{-1}^{1} t^2 dt + 2i\int_{-1}^{1} tdt = -\frac{4}{3}$$