Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2005/2006
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 5
Giovedì 20 Aprile 2006

Notazione: dati $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ |z - z_0| < r\}$ e $S(z_0, r) := \partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ t.c.\ |z - z_0| = r\}$.

1. Calcolare i seguenti integrali usando la formula integrale di Cauchy e i suoi corollari ($\gamma = S(0, 1)$ percorsa una volta in senso antiorario):
   (a) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$
   (b) $\int_\gamma \frac{\cos(z^2)}{z} dz$
   (c) $\int_\gamma \frac{z^2}{z-(1/2)} dz$
   (d) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^{38}} dz$
   (e) $\int_\gamma \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz$
2. Sia f una funzione intera (cioé olomorfa su tutto $\mathbb{C}$). Sia $M \in \mathbb{R}^{>0}$, $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che se per ogni z t.c. $|z| > 1$ si ha $|f(z)| \leq M|z|^n$ allora f è un polinomio di grado al più n.
3. Dimostrare che $\mathbb{C}$ non è analiticamente isomorfo a $D(0, 1)$.
4. Determinare l'ordine in p di f nei seguenti casi:
   (a) $f(z) = z^3,\ p = 1$
   (b) $f(z) = 1/z,\ p = 1$
   (c) $f(z) = \sinh(z)\cos(z)e^z,\ p = 0$
   (d) $f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z},\ p = \pi$
   (e) $f(z) = \sin(z^3) - (\sin(z))^3,\ p = 0$
5. Dimostrare che $z \mapsto z^2$ definisce un isomorfismo analitico tra il primo quadrante e il semipiano superiore e tra il primo quarto di disco e il semidisco superiore. Dimostrare inoltre che $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ definisce un isomorfismo analitico tra il semidisco superiore e il primo quadrante. Trovare infine un isomorfismo analitico tra il primo quarto di disco e il semipiano superiore.
6. Dimostrare che $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ definisce un isomorfismo analitico tra $U := H - \overline{D(0, 1)}$ e H, dove $H := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.