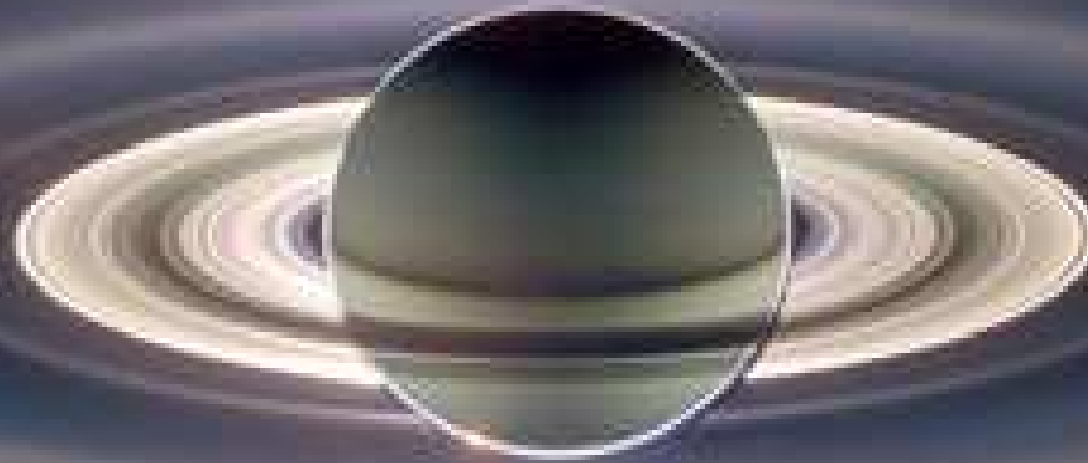


***Stabilità e caos nel sistema  
solare: cosa predicano le  
teorie matematiche?***



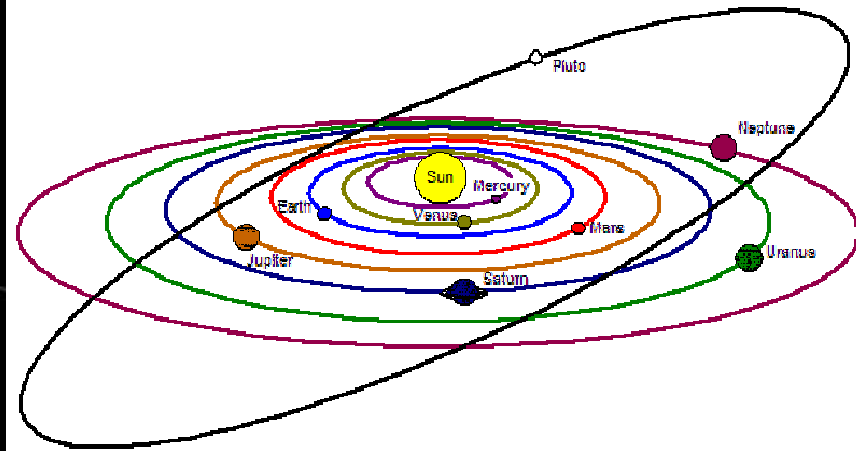
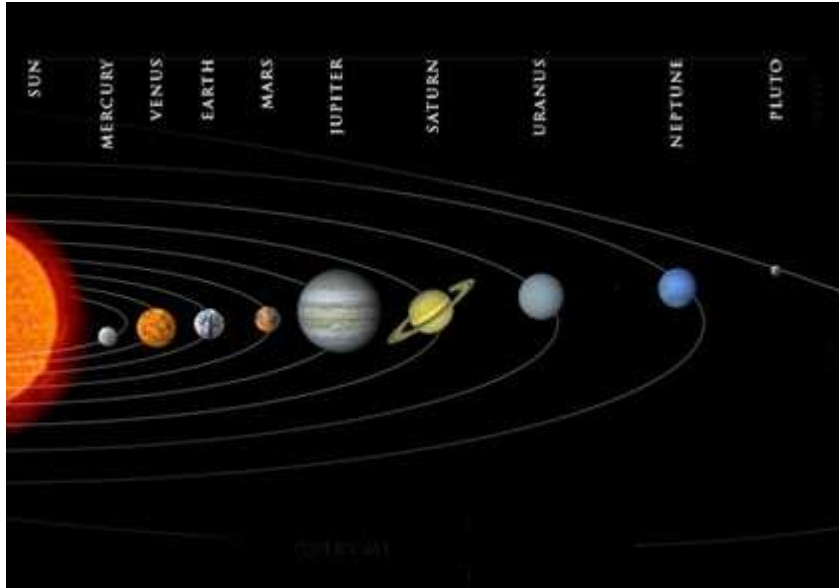
**Alessandra Celletti**

Dipartimento di Matematica  
Università di Roma Tor Vergata  
celletti@mat.uniroma2.it

# SOMMARIO

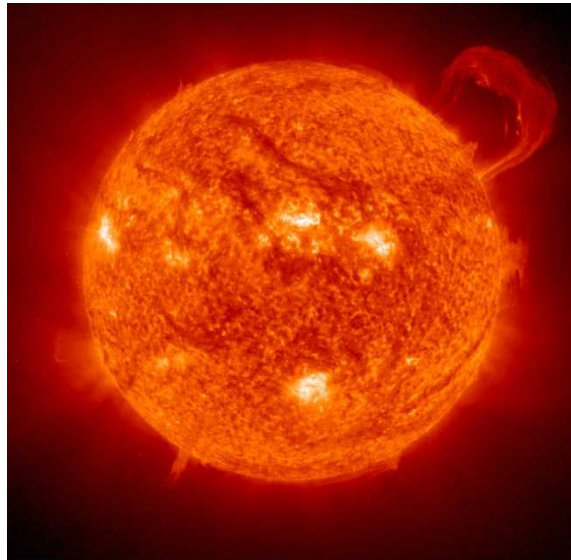
1. Il Sistema Solare
2. La Meccanica Celeste
3. Il problema dei 2 corpi
4. Laplace e il determinismo
5. Il problema dei 3 corpi
6. Caos
7. Sistema solare: ordine o caos?
8. Conclusione

# 1. Il sistema solare



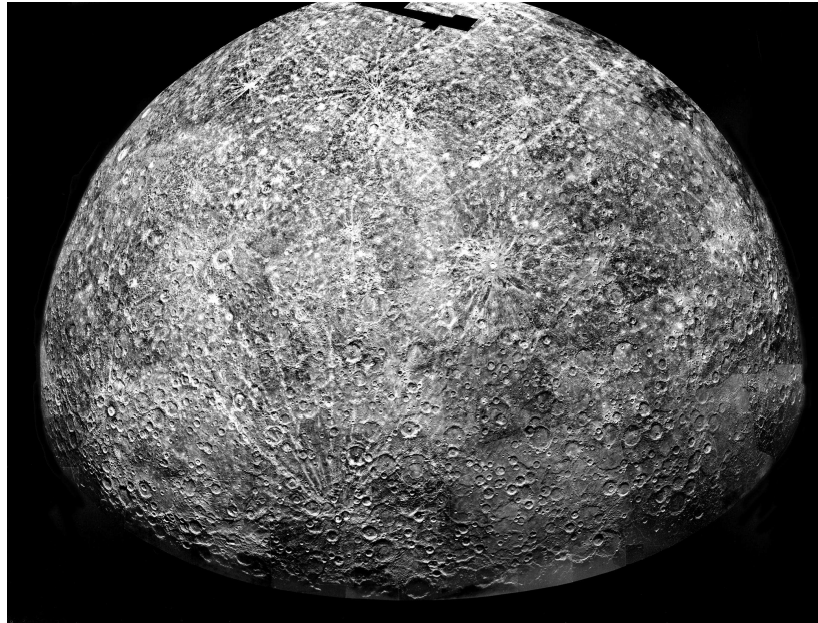
- Moto di rivoluzione attorno al Sole
- Moto di rotazione attorno al proprio asse
- Pianeti su orbite quasi circolari e poco inclinate
- Pianeti nani su orbite ellittiche ed inclinate
- Corpi minori su orbite regolari o caotiche

# Il Sole



- Stella di media grandezza alla periferia di uno dei bracci a spirale della Via Lattea
- Circa a metà della sua vita (4.5 miliardi di anni)
- Evoluzione in gigante rossa e nana bianca
- Massa:  $2 \cdot 10^{30}$  Kg
- Raggio 695,000 Km
- Composizione: H e He

# Mercurio



$a=0.3871$  UA (semiasse maggiore)

$e=0.2056$  (eccentricita')

$i=7$  gradi (inclinazione)

$R=2439.7$  km (raggio)

$M=0.33022 \times 10^{24}$  kg (massa)

No satelliti

Risonanza spin-orbita 3/2

*Differenza stella-pianeta: la stella brilla di luce propria, il pianeta non produce energia.*

**1 UA = distanza Sole-Terra = 150 milioni km.**

# Venere



$a=0.7233$  UA

$e=0.0068$

$i=3.39$  gradi

$R=6051.9$  km

$M=4.8690 \times 10^{24}$  kg

No satelliti

Rotazione retrograda



# Terra



$a=1$  UA

$e=0.0167$

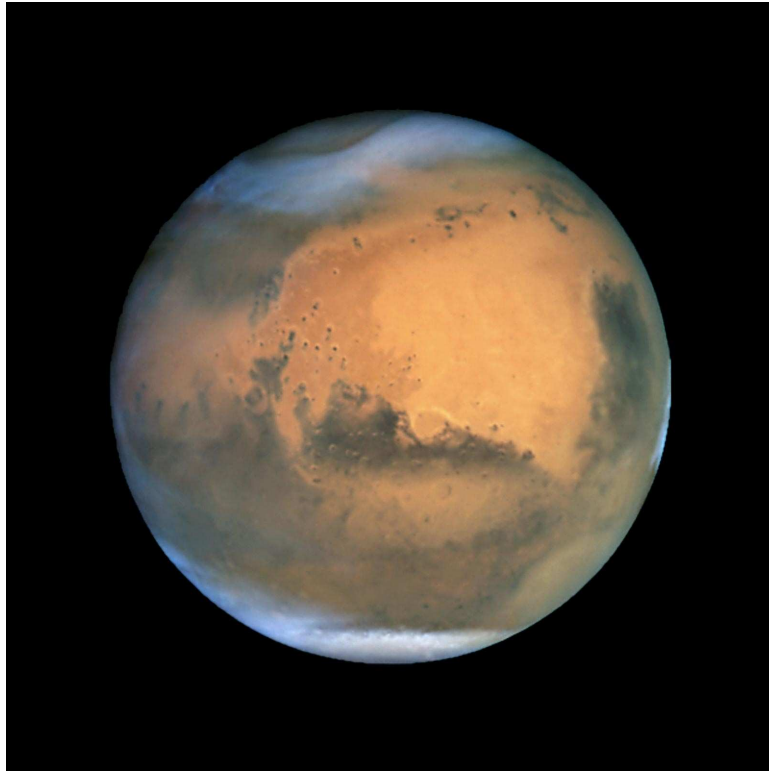
$i=0$  gradi

$R=6378.14$  km

$M=5.9742 \times 10^{24}$  kg

Satelliti: Luna in risonanza  
sincrona con la Terra

# Marte



$a=1.52$  UA

$e=0.093$

$i=1.85$  gradi

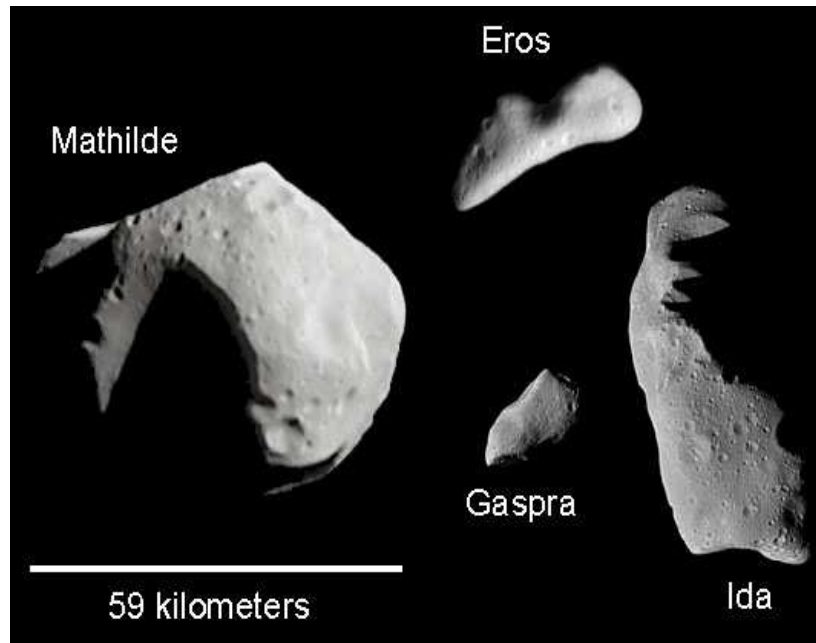
$R=3397$  km

$M=0.64191 \times 10^{24}$  kg

Satelliti: Phobos, Deimos in  
rotazione sincrona



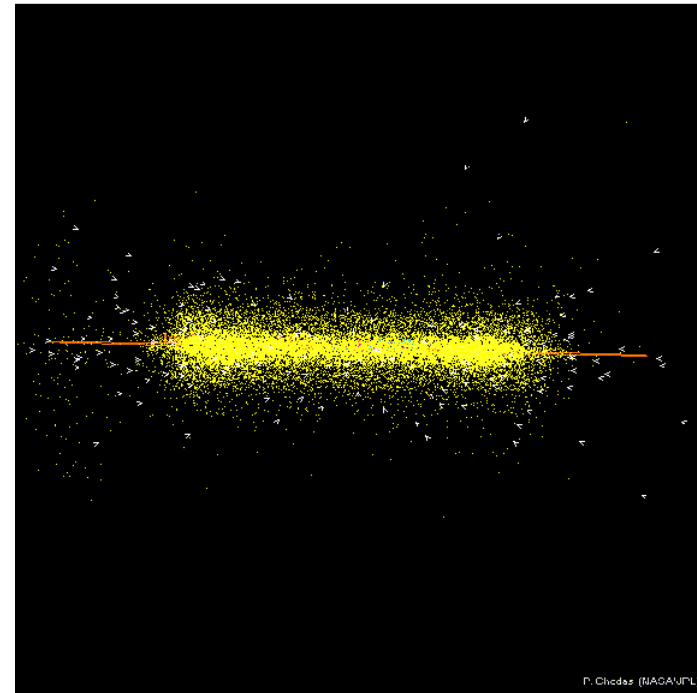
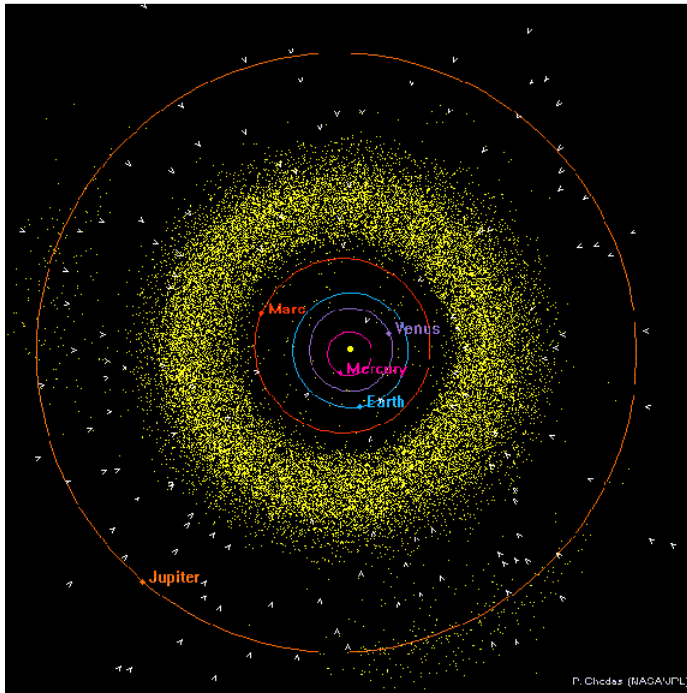
# Asteroidi (160,000 oggetti catalogati )



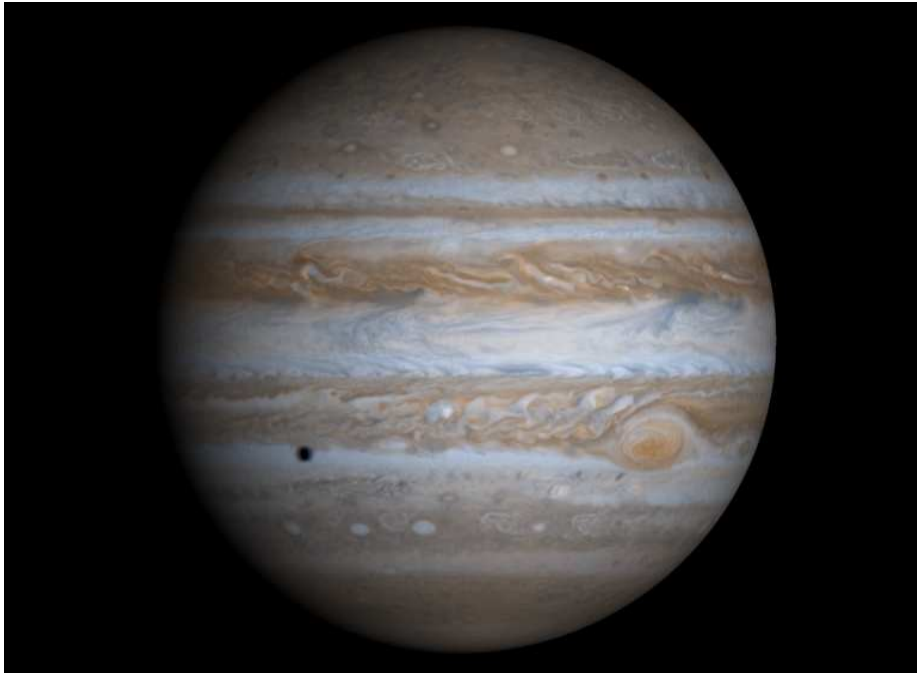
- Cerere, scoperto da Giuseppe Piazzi nel 1801 (R=500 km)
- tra Marte e Giove
- e,i,R,ecc. variabili
- alcuni sono sull'orbita di Giove
- alcuni hanno satelliti
- alcuni sono in *risonanza orbitale* con Giove

# Sistema Solare Interno

(pianeti terrestri; le frecce indicano comete)



# Giove



Macchia rossa, sottile anello

$a=5.203$  UA

$e=0.048$

$i=1.3$  gradi

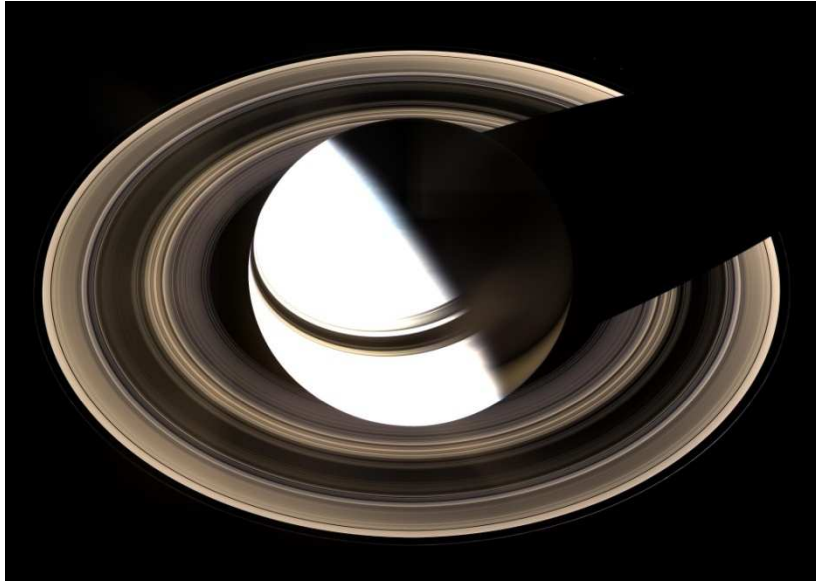
$R=71492$  km

$M=1898.8 \times 10^{24}$  kg !!!!

(1/1000 massa Sole)

Satelliti: Io, Europa,  
Ganimede, Callisto  
(galileiani sincroni e  
risonanze orbitali),  
Amaltea, Thebe, ecc. (63)

# Saturno



$a=9.54$  UA

$e=0.054$

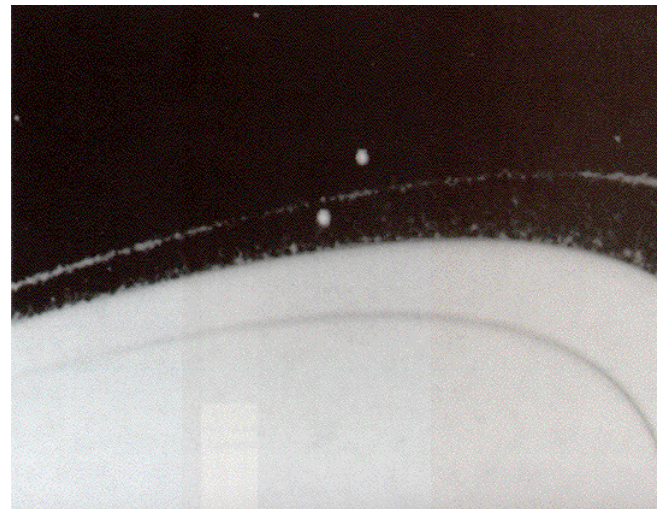
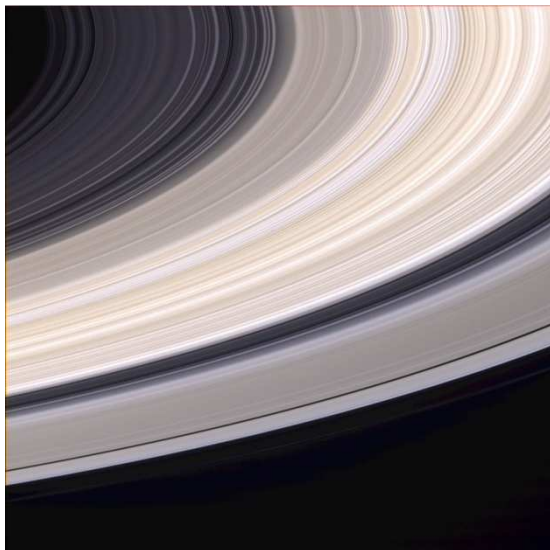
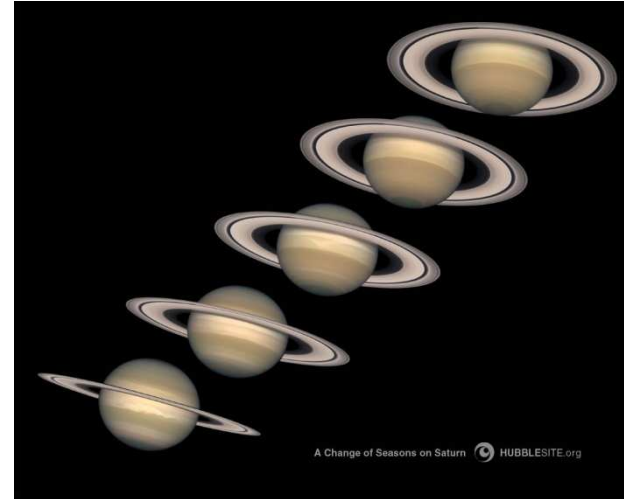
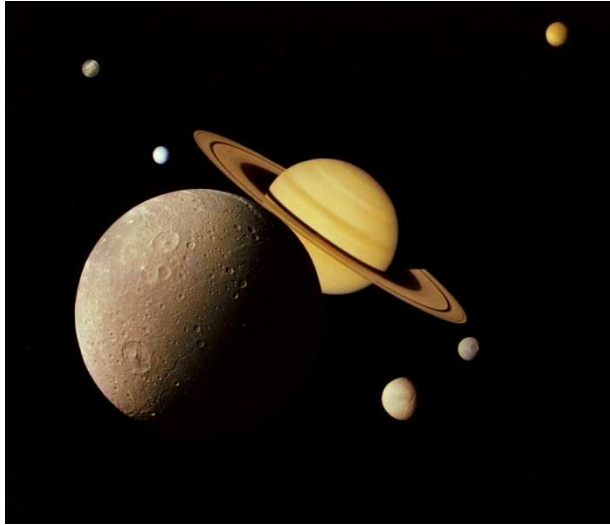
$i=2.49$  gradi

$R=60268$  km

$M=568.5 \times 10^{24}$  kg

Satelliti: Mima, Encelado, Teti, Dione, Rea, Titano (sincroni e risonanze orbitali), Iperione, ecc. (59)

# Anelli di Saturno



# Urano



$a=19.19$  UA

$e=0.047$

$i=0.77$  gradi

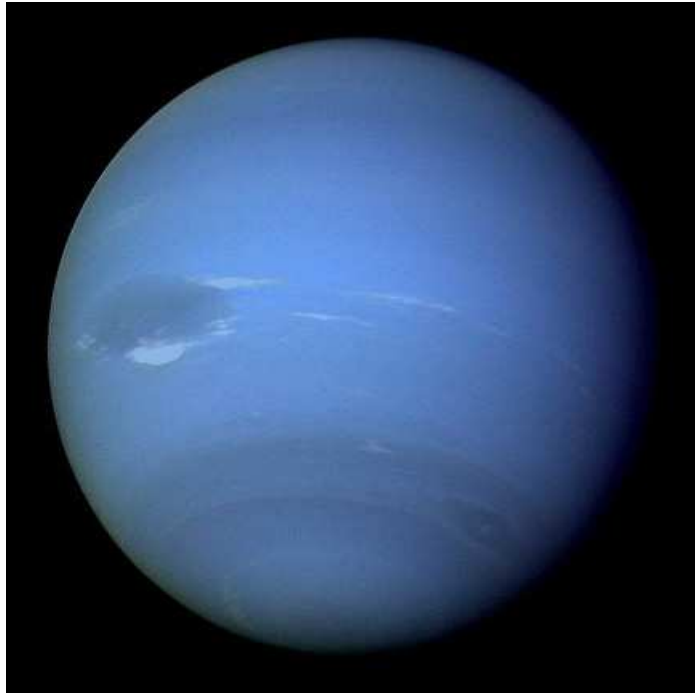
$R=25559$  km

$M=86.625 \times 10^{24}$  kg

Satelliti: Ariel, Umbriel,  
Oberon, Miranda  
(sincroni e risonanze  
orbitali), ecc. (27)

Asse di rotazione sull'eclittica

# Nettuno



$a=30.07$  UA

$e=0.008$

$i=1.77$  gradi

$R=24764$  km

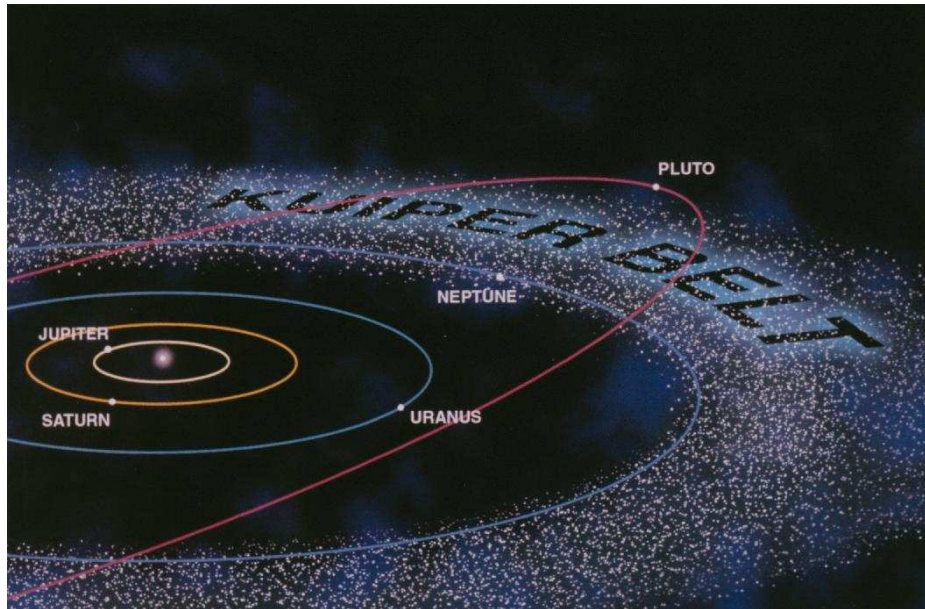
$M=102.78 \times 10^{24}$  kg

Satelliti: Tritone, Nereide  
(sincroni e risonanze  
orbitali), ecc. (13)

Risonanza orbitale 3:2  
Nettuno-Plutone

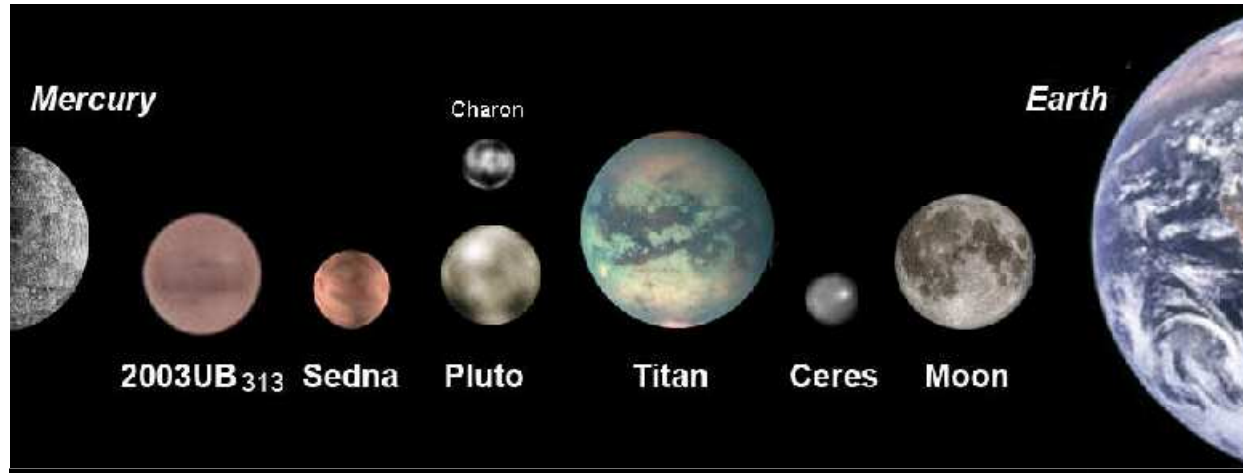


# Fascia di Kuiper (centinaia di oggetti)



- Risonanti (Plutone): 39 UA
- Classici: 42-48 UA
- Diffusi: grandi e, i; sorgente di comete a *corto periodo*

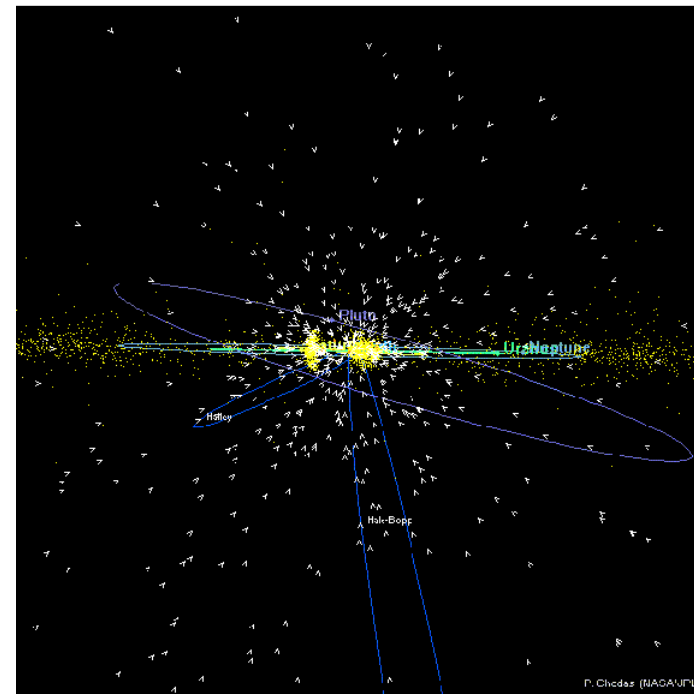
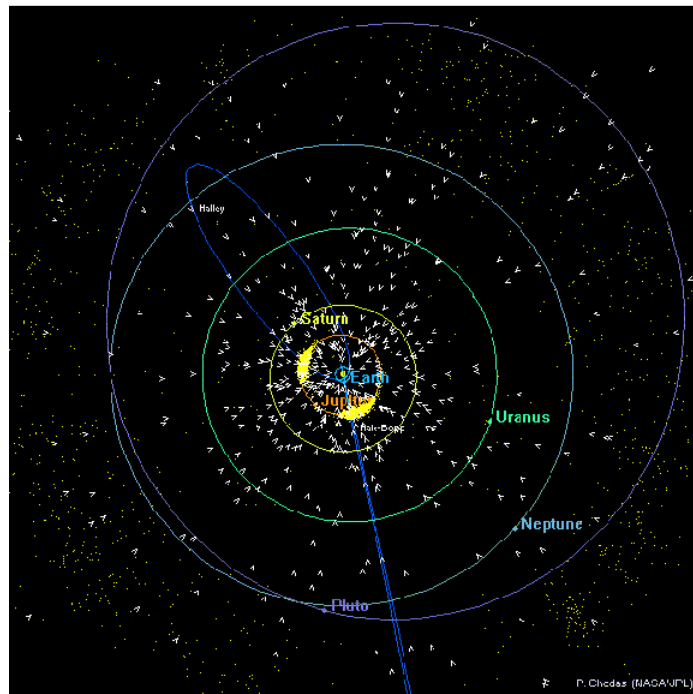
# Plutone



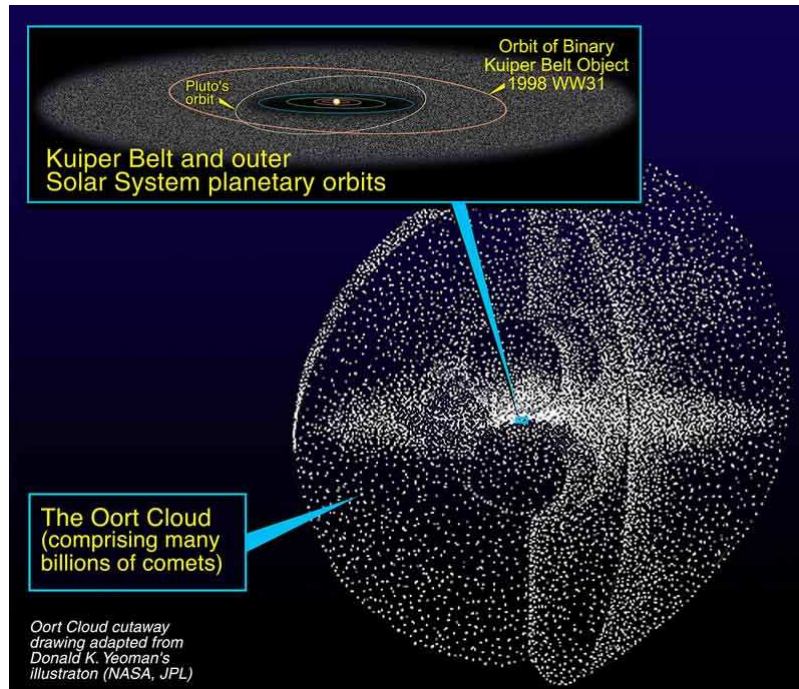
- $a=39.48$  UA
- $e=0.249$
- $i=17.14$  gradi
- $R=1151$  km
- $M=0.013 \times 10^{24}$  kg
- Satelliti: Caronte (sincrono completo) e altri due

# Sistema solare esterno

(pianeti gassosi e Kuiper ghiaccio/roccia; le frecce indicano comete)



# Nube di Oort



- Ipotizzata da Ian Oort nel 1950
- Tra 30,000 e 100,000 UA
- Miliardi di oggetti ghiacciati
- Serbatoio di comete a *lungo periodo*, inserite all'interno del sistema solare da forti perturbazioni, quali il passaggio ravvicinato di una stella o il passaggio del Sole attraverso una nube molecolare gigante.

# Definizione di pianeta, pianeta nano e piccoli corpi

(IAU, Praga, Agosto 2006)

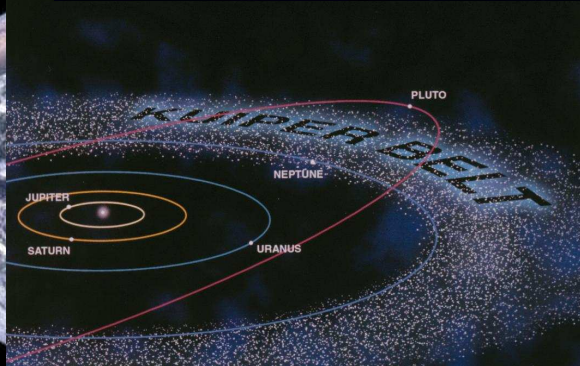
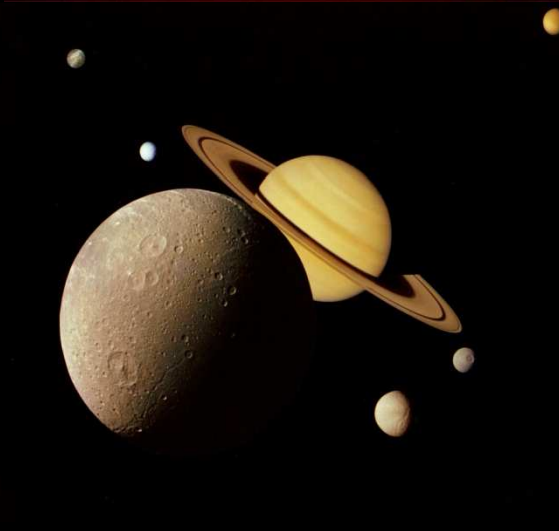
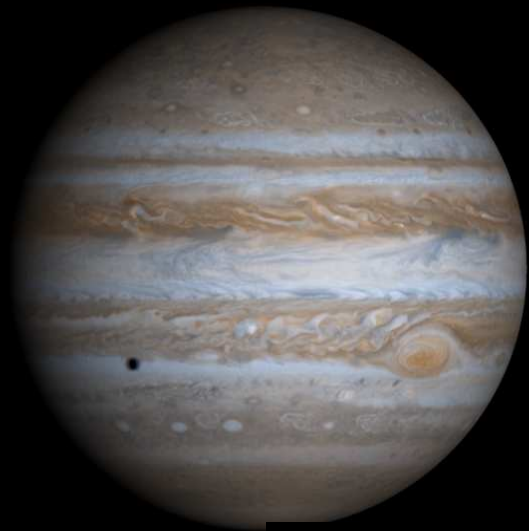
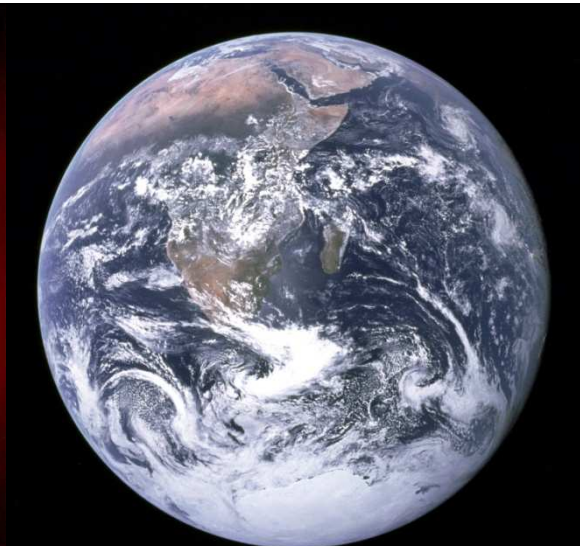
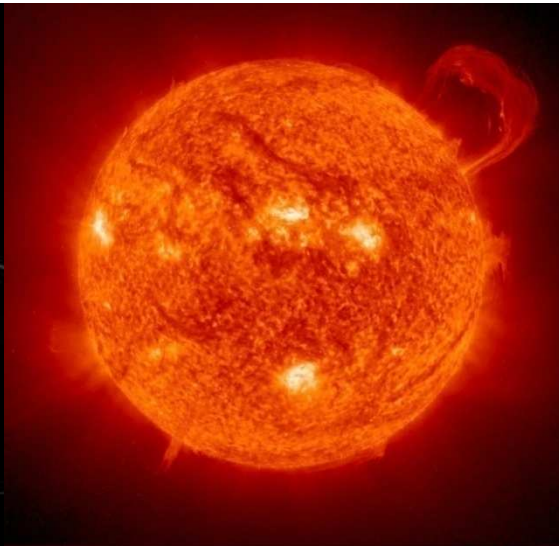
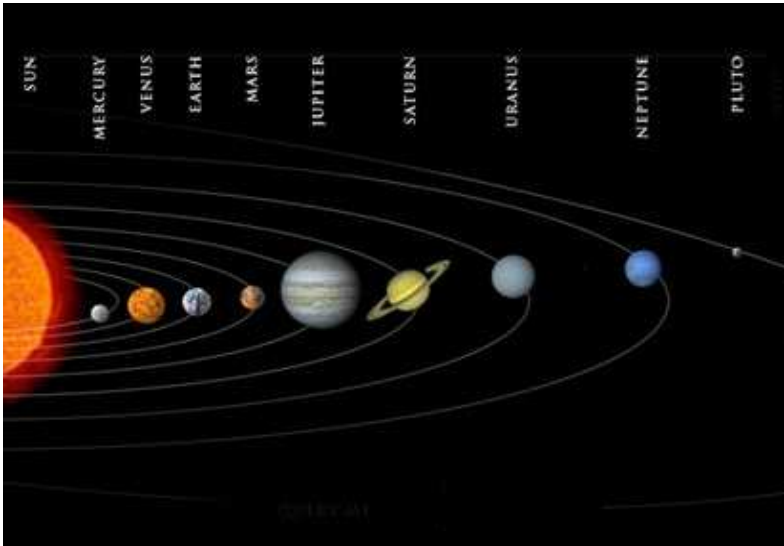
- Un **pianeta** è un corpo celeste che soddisfa i seguenti requisiti:
  - è in orbita intorno al Sole;
  - la sua massa è così elevata che la sua gravità supera le forze di corpo rigido, in modo tale da fargli assumere una forma in “equilibrio idrostatico”, cioè *quasi sferica*;
  - ha ripulito le immediate vicinanze attorno alla propria orbita (ovvero non esistono corpi che possano minacciosamente intersecare la sua traiettoria).
- Un **pianeta nano** è un corpo celeste tale che:
  - è in orbita intorno al Sole;
  - la sua massa è così elevata che la sua gravità supera le forze di corpo rigido, in modo tale da fargli assumere una forma in “equilibrio idrostatico”, cioè *quasi sferica*;
  - non ha ripulito le vicinanze attorno alla propria orbita;
  - non è un satellite.

- Tutti gli altri oggetti, a parte i satelliti, che orbitano intorno al Sole sono denominati genericamente *piccoli corpi*.
- In base a tali definizioni rientrano nella categoria dei pianeti Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano e Nettuno.
- Esempi di pianeti nani sono Plutone, Cerere ed Eris.
- Comete e asteroidi fanno invece parte della categoria dei piccoli corpi.

## 2. La Meccanica Celeste

- La **MECCANICA CELESTE** studia la dinamica degli oggetti del sistema solare (determinazione delle traiettorie di pianeti, satelliti, asteroidi, ecc.)
- La **DINAMICA DEL VOLO SPAZIALE** è la disciplina che studia il moto dei satelliti artificiali e delle sonde interplanetarie (prima **missione spaziale**: Sputnik 1 il 4 Ottobre 1957)
- Dinamica dei pianeti **extrasolari** (# 539 all' 4/4/2011)





# Meccanica Celeste

– da Aristotele ad oggi

- Aristotele 384-322 AC – il sistema del mondo
- Ipparco 190-120 AC – epicicli
- Tolomeo 85-165 – epicicli e deferenti
- Copernico 1473-1543 – sistema eliocentrico
- Tycho Brahe 1546-1601 – dati planetari
- Galileo Galilei 1564-1642 – meccanica
- Keplero 1571-1630 – leggi planetarie
- Newton 1642-1727 – gravità
- Laplace 1749-1827 – determinismo
- Henri Poincaré 1854-1912 – problema tre corpi / caos
- ... Eulero, Gauss, Lagrange, Delaunay, Hill, Kolmogorov, Arnold, Moser, ...

## 3. Il problema dei 2 corpi

- Modello *semplificato* in cui si considera solo l'interazione gravitazionale tra **2** oggetti

- Legge di Newton:

$$F = - \frac{G M m}{d^2}$$

- Esempi:
  - *Sole e Pianeta* (Sole-Terra, Sole-Giove, ecc.)
  - *Sole e asteroide*
  - *Sole e cometa*
  - *Pianeta e satellite* (Terra-Luna, ecc.)
  - *Due stelle binarie*

# Tycho Brahe (1546-1601)

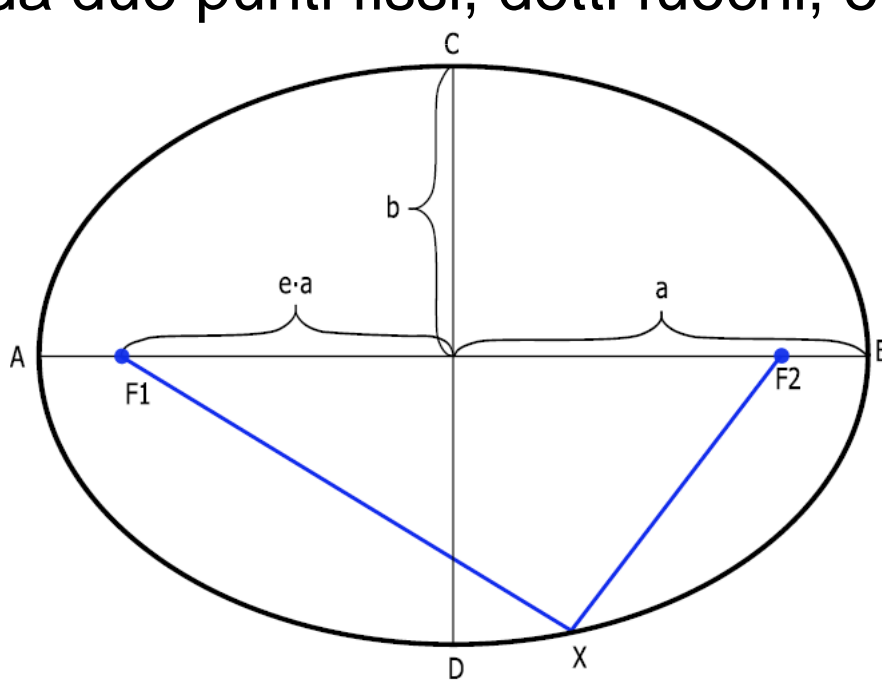
- Danese; il re di Danimarca e Norvegia, Federico II regalò a Brahe l'isola di Hven, dove costruì un osservatorio astronomico chiamato “**Uraniborg**” – “Il castello del cielo”
- Dotò l'osservatorio di strumenti per le osservazioni: accurati cataloghi stellari ed effemeridi planetarie
- Brahe elaborò una propria teoria nota con il nome di *sistema ticonico*, un compromesso tra i modelli tolemaico e copernicano: la Terra rimane al centro dell'universo e intorno ad essa orbitano il Sole e la Luna; gli altri pianeti ruotano invece attorno al Sole

# Johannes Kepler (1571-1630)

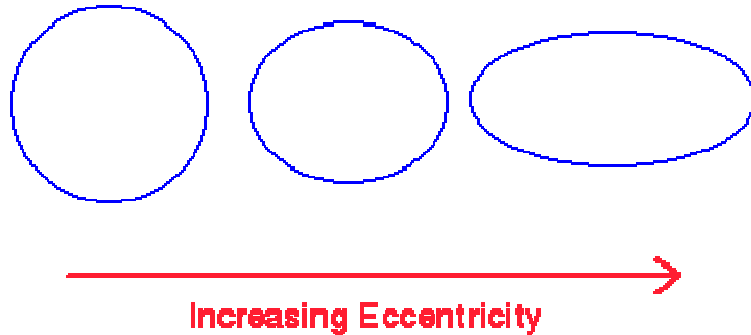
- Abbracciò senza esitazioni la teoria eliocentrica di Copernico
- Lasciò numerosi scritti in cui l'astronomia veniva miscelata con la matematica, la fisica, la filosofia e la musica (nell' "***Harmonices Mundi***" ricerca l'armonia fisica dei moti planetari)
- Studiò per anni i dati astronomici sul moto dei pianeti raccolti da Tycho Brahe
- Giunse alla conclusione che il movimento dei pianeti è regolato da tre leggi fondamentali

# Le leggi di Keplero

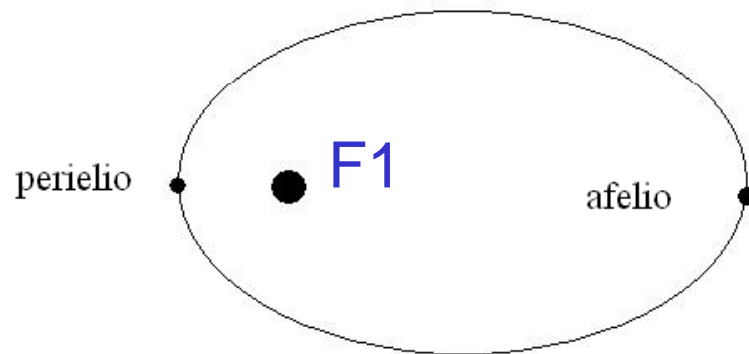
- Tre leggi che risolvono il problema dei due corpi: i pianeti si muovono su **ELLISSI**, sono più VELOCI vicino al Sole, il PERIODO cresce all'aumentare della distanza
- **Ellisse**: luogo dei punti tali che la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante



- **F1, F2** fuochi
- **a** = semiasse maggiore
- **b** = semiasse minore
- **e** = eccentricità



- Diverse eccentricità:
- $e=0$  cerchio
- $0 < e < 1$  ellisse



- Il Sole in  $F1$ ,  
il fuoco  $F2$  è vuoto
- Perielio: vicino al Sole
- Afelio: lontano dal Sole

### Eccentricità:

*Terra: 0.017, Giove: 0.048, Mercurio: 0.206, Nettuno: 0.008,  
Plutone: 0.249, Luna: 0.055, Europa: 0.0094, Tarvos: 0.5309*



**I legge di Keplero:** i pianeti si muovono su ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi

(<http://heasarc.nasa.gov/docs/heasarc/videos/education.html>)

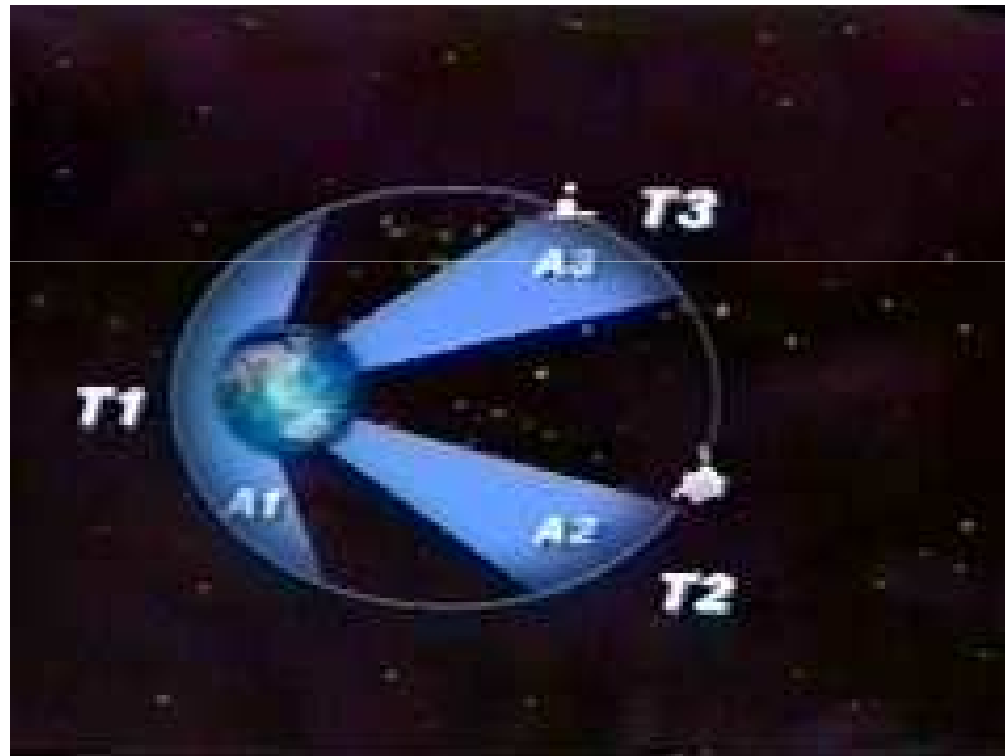


**Il legge di Keplero:** i pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali

(<http://heasarc.nasa.gov/docs/heasarc/videos/education.html>)



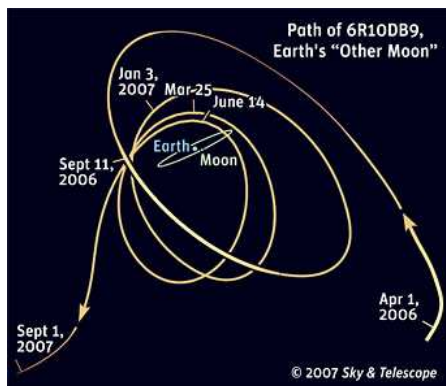
**III legge di Keplero:** Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore  
(<http://heasarc.nasa.gov/docs/heasarc/videos/education.html>)



## 4. Laplace e il determinismo

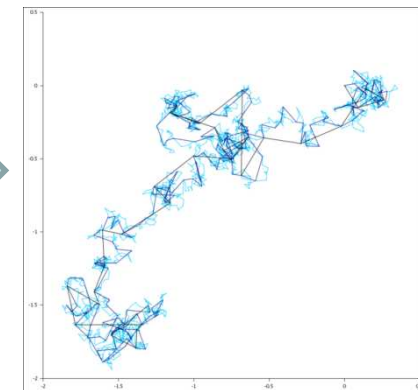
- Pierre Simon Laplace (1749-1827)
- « *Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un'intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse abbastanza vasta da sottoporre questi dati ad analisi abbraccerebbe nella stessa formula i moti dei corpi più grandi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero: per essa non ci sarebbe nulla d'incerto, ed il futuro come il passato sarebbe presente ai suoi occhi* »  
(Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1812)

- Tutte le azioni avvengono in maniera causale come effetto di una catena consequenziale di avvenimenti accaduti in precedenza; nulla avviene per caso, ma esiste sempre causa-effetto.
- Un sistema *deterministico* è governato da un'equazione differenziale: assegnate le condizioni iniziali, il futuro è determinato in modo univoco.
- Un sistema *stocastico* è descritto da processi casuali o stocastici: l'evoluzione futura del sistema è indeterminata e si può conoscere solo in probabilità.



**Deterministico:** moto dei pianeti

**Stocastico:** moto browniano del polline sospeso nell'acqua



## 5. Il problema dei 3 corpi

- In realtà le leggi di Keplero sono solo **un'approssimazione** del moto dei pianeti → **Sole-Terra-Giove** → 3 corpi non si riesce a risolvere esattamente.

- **Teoria matematica delle perturbazioni:** consente di approssimare la soluzione del problema dei tre corpi

- **Sole-Terra-Giove:**  $m(\text{Giove}) = m(\text{Sole}) / 1000$  ovvero  $m(\text{Giove})$  molto inferiore a  $m(\text{Sole})$  → moto della Terra sostanzialmente governato da:

**2-corpi Sole-Terra**  
**+**  
**piccola perturbazione di Giove**

- La **teoria delle perturbazioni** consente di determinare una soluzione approssimata delle equazioni del moto. Venne sviluppata da Laplace, Lagrange, Delaunay, Leverrier, Tisserand (XVIII-XIX secolo).
- *I pianeti rimarranno vicini alle loro orbite attuali oppure gli effetti cumulativi di piccole perturbazioni cambieranno le orbite su tempi lunghi, fino a farli collidere con il Sole o ad essere espulsi dal sistema solare?*



- **Charles Delaunay** (1816-1872) sviluppò una teoria della Luna molto precisa, basata sulla teoria delle perturbazioni



# THÉORIE

DU

## MOUVEMENT DE LA LUNE.

### CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE. — MOUVEMENT ELLIPTIQUE. — VARIATION DES CONSTANTES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

1. Soient X, Y, Z les coordonnées de la Terre rapportées à des axes rectangulaires fixes dans l'espace; ξ, η, ζ les coordonnées de la Lune, et ξ', η', ζ' celles du Soleil rapportées aux mêmes axes; M la masse de la Terre, m celle de la Lune, et m' celle du Soleil.

Le Soleil, la Lune et la Terre étant supposés s'attirer mutuellement d'après la loi de Newton, les équations différentielles du mouvement de la Terre seront

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{m'(\xi - X)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{3/2}} + \frac{m(\xi' - X)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{m'(\eta - Y)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{3/2}} + \frac{m'(\eta' - Y)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{m'(\zeta - Z)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{3/2}} + \frac{m'(\zeta' - Z)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{3/2}}$$

T. XXVIII.

### CHAPITRE II. — DÉVELOPPEMENT DE R.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \cos(x - \nu) = & \left(1 + 2e^2 + \frac{239}{64}e^4\right) \cos(x - g' - l') \\ & + \left(3e' + \frac{11}{4}e^2\right) \cos(x - g' - 2l') \\ & + \left(e' + \frac{5}{2}e^2\right) \cos(x - g') \\ & + \left(\frac{53}{8}e^2 + \frac{39}{16}e^4\right) \cos(x - g' - 3l') \\ & + \left(\frac{11}{8}e^2 + \frac{49}{16}e^4\right) \cos(x - g' + l') \\ & + \frac{77}{6}e^2 \cos(x - g' - 4l') \\ & + \frac{23}{12}e^2 \cos(x - g' + 2l') \\ & + \frac{2955}{128}e^4 \cos(x - g' - 5l') \\ & + \frac{343}{128}e^4 \cos(x - g' + 3l'); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \cos(x - 3\nu) = & \left(1 - 6e^2 + \frac{423}{64}e^4\right) \cos(x - 3g' - 3l') \\ & + (5e' - 22e^2) \cos(x - 3g' - 4l') \\ & - \left(e' - \frac{5}{4}e^2\right) \cos(x - 3g' - 2l') \\ & + \left(\frac{127}{8}e^2 - \frac{3065}{48}e^4\right) \cos(x - 3g' - 5l') \\ & + \left(\frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{48}e^4\right) \cos(x - 3g' - l') \\ & + \frac{163}{4}e^2 \cos(x - 3g' - 6l') \\ & + \frac{35413}{384}e^4 \cos(x - 3g' - 7l') \\ & + \frac{1}{384}e^4 \cos(x - 3g' + l'); \end{aligned}$$

(\*) La valeur de  $\frac{d^2}{dt^2} \cos(x - 3\nu)$ , calculée jusqu'aux quantités du quatrième ordre par rapport à e', ne renferme aucun terme en cos x - 3g'.

auquel on aurait dû s'arrêter, d'après ce qui vient d'être dit, et cela pour des raisons spéciales qui seront indiquées plus tard (chapitre IV).

Ajoutons encore que,  $e'$  étant environ trois fois plus petit que  $\gamma$  et  $\epsilon$ , dans le rejet des termes d'un ordre supérieur à celui auquel on voulait s'arrêter, on a regardé  $e'^2, e'^3, e'^4$ , comme des quantités des quatrième, cinquième, sixième ordres;  $e'^6$  comme une quantité du huitième ordre, etc.

En opérant conformément aux explications qui précèdent, on a trouvé pour R la valeur suivante :

$$R = \frac{\mu}{2a} + \frac{\mu^2 e^2}{a^2} \left[ \frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 - \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{9}{16} \epsilon^2 e^2 + \frac{15}{32} \epsilon^4 + \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon^4 + \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon^4 - \frac{27}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 - \frac{45}{16} \gamma^2 \epsilon^4 + \frac{45}{64} \epsilon^2 e^4 \right] + \left( \frac{9}{64} \frac{45}{16} \gamma^2 + \frac{45}{64} \epsilon^2 + \frac{45}{64} \epsilon^2 \right) \frac{e^2}{a^2} + \left[ \frac{3}{4} \frac{3}{2} \gamma^2 - \frac{15}{8} \epsilon^2 + \frac{15}{8} \epsilon^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{69}{64} \epsilon^4 + \frac{75}{16} \epsilon^2 e^2 + \frac{39}{64} \epsilon^4 - \frac{15}{8} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{15}{8} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{69}{32} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{75}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 - \frac{65}{381} \epsilon^4 - \frac{345}{128} \epsilon^2 e^2 + \left( \frac{5}{16} - 5 \gamma^2 + \frac{5}{16} \epsilon^2 + \frac{5}{16} \epsilon^2 \right) \frac{e^2}{a^2} \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l') + \left[ -\frac{1}{2} \epsilon + 3 \gamma^2 \epsilon + \frac{1}{16} \epsilon^2 - \frac{3}{4} \epsilon e^2 - 3 \gamma^2 \epsilon - \frac{3}{8} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{9}{8} \gamma^2 \epsilon e^2 - \frac{1}{384} \epsilon^4 + \frac{3}{32} \epsilon^2 e^2 - \frac{15}{16} \epsilon e^2 - \frac{9}{16} \frac{e^2}{a^2} \right] \cos l + \left[ \frac{3}{4} \gamma^2 - \frac{9}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{9}{8} \epsilon^2 e^2 + \frac{3}{32} \epsilon^2 + \frac{9}{2} \gamma^2 \epsilon - \frac{27}{4} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 - \frac{81}{16} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{81}{64} \epsilon^2 e^2 + \frac{261}{256} \epsilon^4 + \frac{27}{4} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 + \left( \frac{45}{64} \epsilon^2 - \frac{225}{16} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{225}{64} \epsilon^2 e^2 \right) \frac{e^2}{a^2} \right] \cos l$$

(C,C)

(2,2)

(2,2)

(2,2)

$$+ \left[ \frac{51}{8} \epsilon e^2 - \frac{51}{4} \gamma^2 \epsilon e^2 - \frac{969}{64} \epsilon^2 e^2 - \frac{115}{8} \epsilon^2 e^2 \right] \cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l') + \left[ -\frac{153}{8} \epsilon e^2 + \frac{153}{4} \gamma^2 \epsilon e^2 + \frac{663}{64} \epsilon^2 e^2 + \frac{345}{8} \epsilon^2 e^2 \right] \cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l') + \left[ \frac{845}{64} \epsilon^2 - \frac{845}{32} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{4225}{128} \epsilon^2 e^2 - \frac{32525}{1024} \epsilon^4 \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-5l') + \left[ \frac{1}{64} \epsilon^2 - \frac{1}{32} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{5}{128} \epsilon^2 e^2 + \frac{11}{1024} \epsilon^4 \right] \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'+l') + \left[ \frac{3}{2} \gamma^2 \epsilon - \frac{3}{2} \gamma^2 \epsilon - \frac{57}{16} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon e^2 \right] \cos(2g+3l) + \left[ -\frac{9}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{9}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{39}{16} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 \epsilon e^2 - \frac{39}{16} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{5}{128} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{117}{32} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 \right] \cos(2g+l) + \left[ \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon - \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon - \frac{45}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 + \frac{81}{32} \gamma^2 \epsilon^2 \right] \cos(2g+2l+l') + \left[ \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon - \frac{9}{4} \gamma^2 \epsilon - \frac{45}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 + \frac{81}{32} \gamma^2 \epsilon^2 \right] \cos(2g+2l-l') + \left[ -\frac{3}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{3}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{3}{16} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 \epsilon e^2 - \frac{3}{16} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{1}{128} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{15}{32} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 \right] \cos(2h+l-2h'-2g'-2l') + \left[ -\frac{3}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{3}{2} \gamma^2 \epsilon + \frac{3}{16} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{15}{4} \gamma^2 \epsilon e^2 \right] \cos(2h-l-2h'-2g'-2l') + \left[ \frac{21}{4} \gamma^2 \epsilon - \frac{21}{4} \gamma^2 \epsilon + \frac{63}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 - \frac{369}{32} \gamma^2 \epsilon^2 - \frac{63}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 \right] \cos(2h-2h'-2g'-3l') + \left[ -\frac{3}{4} \gamma^2 \epsilon + \frac{3}{4} \gamma^2 \epsilon - \frac{9}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 + \frac{3}{32} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{9}{8} \gamma^2 \epsilon^2 e^2 \right] \cos(2h-2h'-2g'-l') + \left[ -\frac{1}{24} \epsilon^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 \epsilon^2 + \frac{1}{30} \epsilon^2 - \frac{1}{16} \epsilon^2 e^2 \right] \cos 4l$$

(4,0)

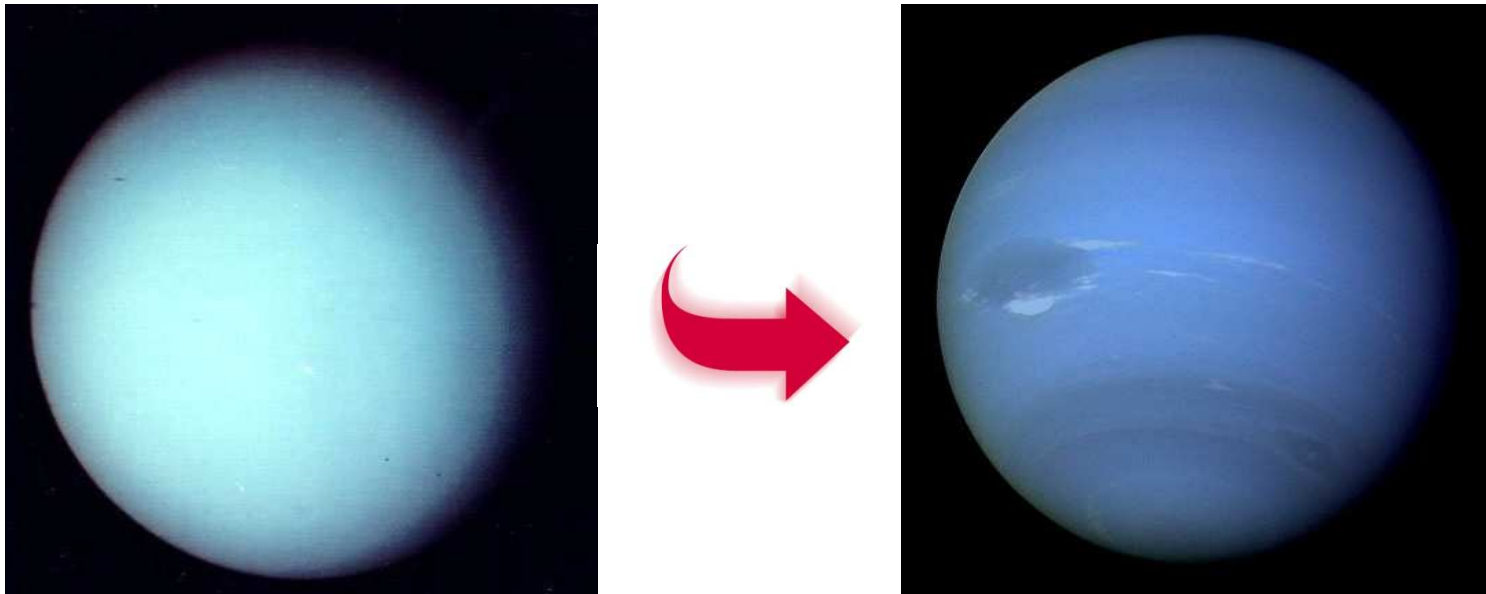
$$\begin{aligned}
 & - \frac{189}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + 6l - 2h' - 2g' - 3l') \\
 & - \frac{27}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + 6l - 2h' - 2g' - l') \\
 & - \frac{21}{128} e^2 e' \cos(2h + 2g - 2l - 2h' - 2g' - 3l') \\
 & + \frac{3}{128} e^2 e' \cos(2h + 2g - 2l - 2h' - 2g' - l') \\
 & + \frac{425}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + 5l - 2h' - 2g' - 3l') \\
 & - \frac{119}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 3l') \\
 & + \frac{865}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - 5l') \\
 & + \frac{1}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - l') \\
 & + \frac{4225}{128} e^2 e' \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 5l') \\
 & + \frac{5}{128} e^2 e' \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' + l') \\
 & - \frac{1509}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 6l') \\
 & + \frac{1}{32} e^2 e' \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' + 2l') \\
 & - \frac{4797}{64} e^2 e' \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 6l') \\
 & - \frac{3}{32} e^2 e' \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' + 2l') \\
 & + \frac{228347}{5120} e^2 e' \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 7l') \\
 & + \frac{213}{5120} e^2 e' \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' + 3l') \\
 & + \frac{25}{16} e^2 e' \cos(2g + 5l)
 \end{aligned}$$

T XXVIII.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{35}{32} e^2 e' \cos(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l') \\
 & - \frac{105}{32} e^2 e' \cos(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l') \\
 & - \frac{455}{128} e^2 e' \cos(4h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 5l') \\
 & - \frac{105}{128} e^2 e' \cos(4h + 4g - 4l - 4h' - 4g' - 3l') \\
 & + \frac{105}{64} e^2 e' \cos(4h + 4g + 6l - 4h' - 4g' - 4l') \\
 & + \frac{243}{32} e^2 e' \cos(4h + 4g + 2l - 4h' - 4g' - 4l') \\
 & + \frac{455}{64} e^2 e' \cos(4h - 4g + 5l - 4h' - 4g' - 5l') \\
 & - \frac{105}{64} e^2 e' \cos(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 3l') \\
 & - \frac{1305}{64} e^2 e' \cos(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 5l') \\
 & + \frac{31}{64} e^2 e' \cos(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 3l') \\
 & + \frac{1785}{128} e^2 e' \cos(4h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 6l') \\
 & - \frac{35}{128} e^2 e' \cos(4h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 2l') \\
 & + \frac{35}{16} e^2 e' \cos(2h + 4g + 4l - 2h' - 2g' - 2l') \\
 & + \frac{35}{16} e^2 e' \cos(4h + 2g + 2l - 4h' - 4g' - 4l') \} \\
 & - m \frac{e^2}{e'^2} \frac{63}{128} e^2 e' \cos(4h + 4g + 5l - 5h' - 5g' - 5l').
 \end{aligned}$$

15. Au moyen du développement de R qui vient d'être donné, on pourra déterminer les valeurs de L, G, H, l, g, h, en fonction du temps, en se servant des équations (9). Les valeurs de ces six quantités devront ensuite être substituées dans les expressions des coordonnées de la Lune, ce qui donnera définitivement ces coordonnées en fonction du temps.

- Sulla base di perturbazioni anomale della traiettoria di Urano, **Nettuno** venne scoperto *a tavolino* da Jean Urbain **Leverrier** (1811-1877) e John **Adams** (1819-1892). Leverrier indicò la posizione approssimata di solo 4 gradi. Il 23 settembre 1846 Nettuno venne osservato da Johann Gottfried **Galle**.

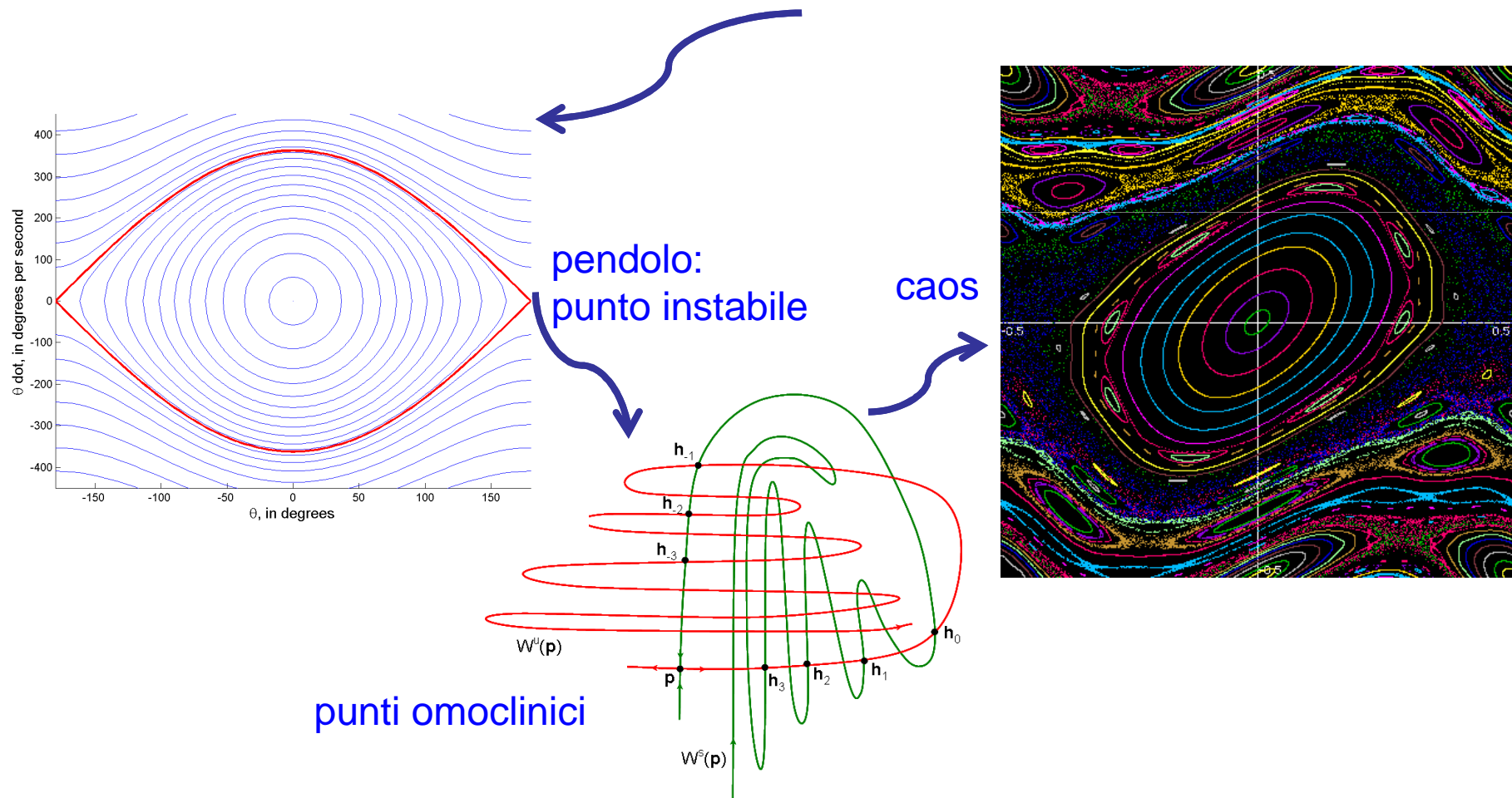


- E' la conferma del **determinismo assoluto!**

## 6. Caos

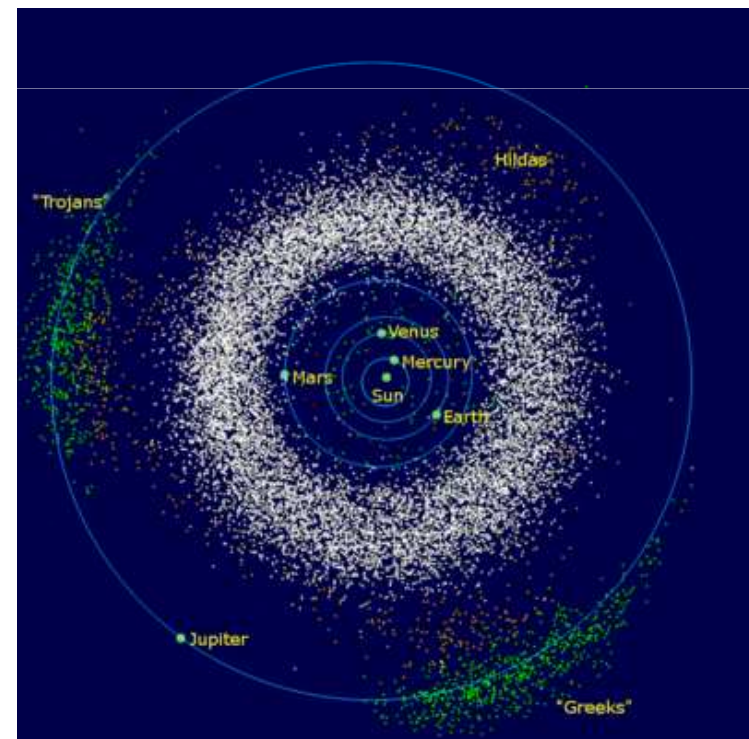
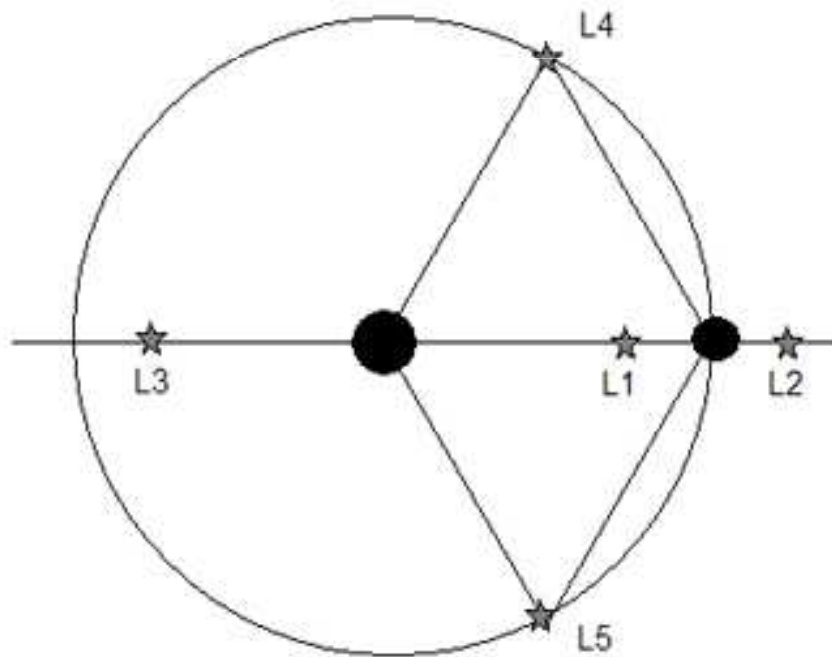
- Caos è un'espressione tecnica per un particolare tipo di moto irregolare associato ad un sistema deterministico con estrema sensibilità alla scelta delle condizioni iniziali.
- Supponiamo di prendere due traiettorie inizialmente molto vicine; osserviamo la loro evoluzione nel tempo. Si parla di estrema *sensibilità alle condizioni iniziali*, se la distanza delle due traiettorie aumenta esponenzialmente nel tempo. In questo caso è impossibile eseguire una predizione a lungo termine, perchè piccole incertezze sulla posizione iniziale vengono amplificate in un tempo breve.

- **H. Poincaré**: problema 3-corpi, premio di Oscar II, re di Svezia e Norvegia
- Scopre i punti *omoclinici*, inizia la teoria del caos





- Soluzioni particolari del problema dei 3 corpi furono trovate da [Lagrange](#):
- Punti collineari L1, L2, L3 (attorno si sviluppa il **caos**)
- Punti triangolari L4, L5: gli asteroidi *Greci e Troiani* sono disposti attorno ai punti di equilibrio *Lagrangiani triangolari* L4 e L5 .





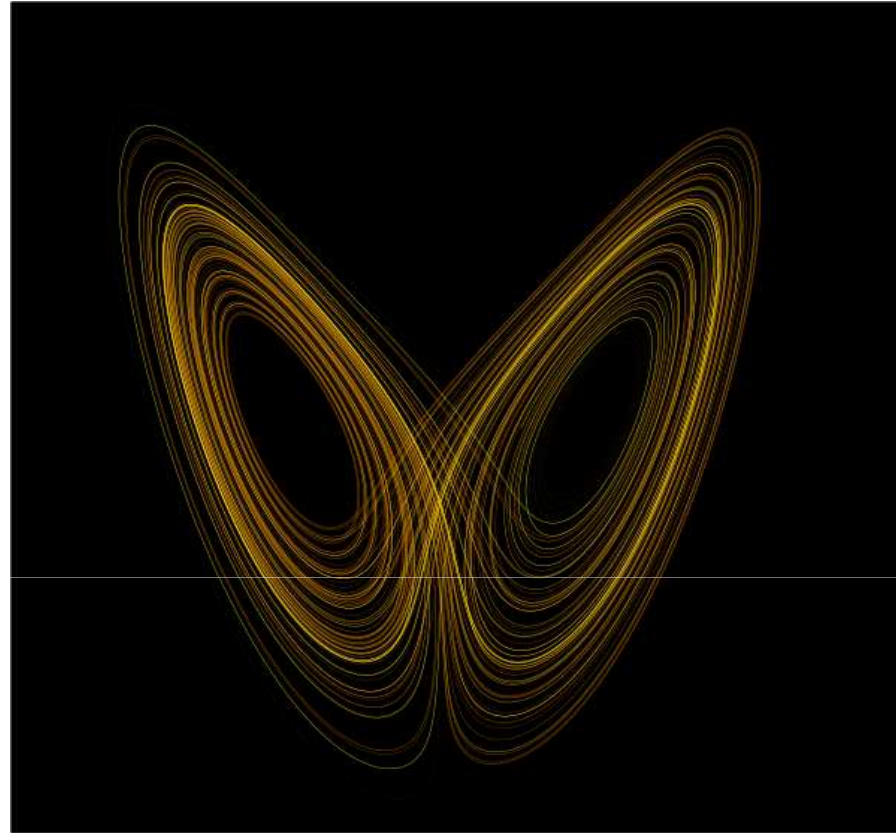
## Henri Poincarè: la fine del determinismo assoluto!

- Un sistema caotico è caratterizzato da:
  - (i) l'evoluzione su tempi lunghi è imprevedibile e simula un processo stocastico
  - (ii) due sistemi con condizioni molto vicine possono avere un futuro radicalmente diverso.
- **H. Poincarè**: Le condizioni iniziali sono sempre note con una certa approssimazione e quindi il futuro è noto con la stessa approssimazione.
- Esempi:
  - Un decimo di grado in più o in meno sposta un ciclone
  - oppure...

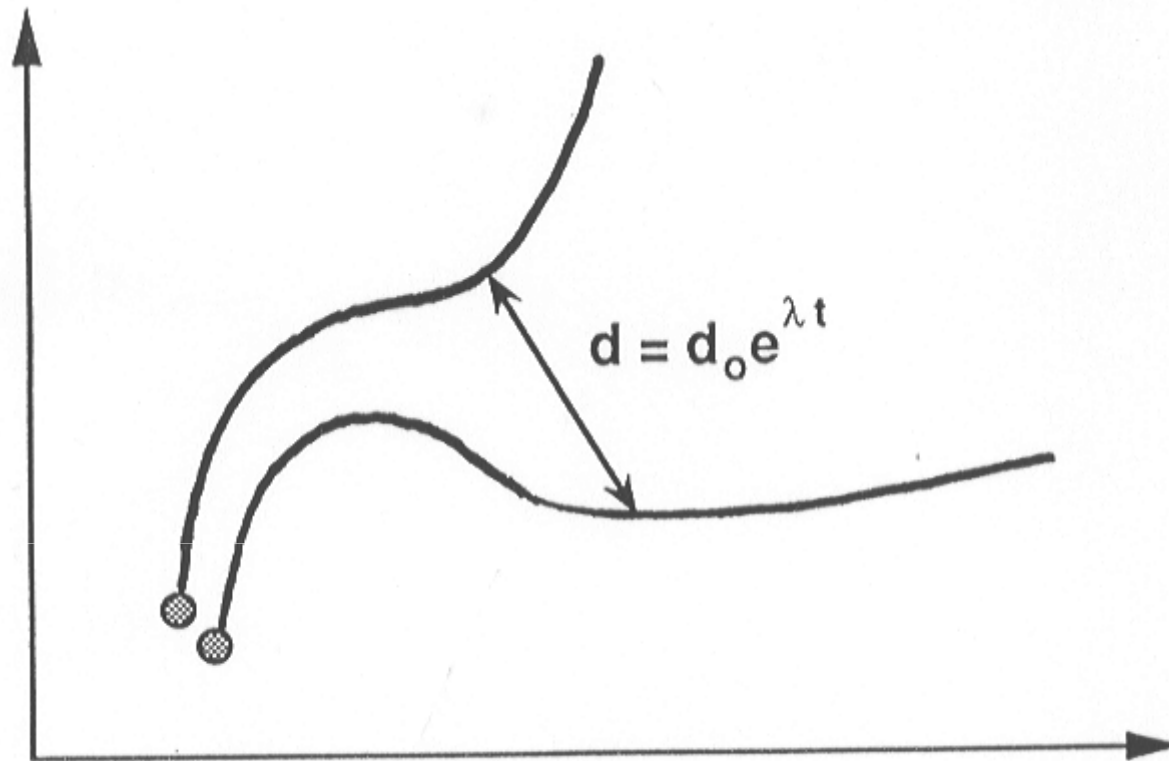
- *“Le plus grand hasard est la naissance d’un grand homme. Ce n’est que par hasard que se sont rencontrées deux cellules génitales, de sexe différent, qui contenaient précisément, chacune de son côté, les éléments mystérieux dont la réaction mutuelle devait produire le génie. On tombera d’accord que ces éléments doivent être rares et que leur rencontre est encore plus rare. Qu’il aurait fallu peu de chose pour dévier de sa route le spermatozoïde qui les portait; il aura suffi de le dévier d’un dixième de millimètre et Napoléon ne naissait pas et les destinées d’un continent étaient changées. Nul exemple ne peut mieux faire comprendre les véritables caractères du hasard”*

*(H. Poincaré, “Science et Méthode”, Flammarion, 1908)*

- Edward Lorenz: l'effetto Butterfly
- Nel 1962 il meteorologo americano Edward Lorenz dimostrò che anche un sistema meteorologico relativamente semplice (descritto da equazioni matematiche non troppo complesse) passava rapidamente dal sereno alla tempesta e viceversa. Ad innescare questi “salti” bastavano delle minime perturbazioni.
- Durante una conferenza, Lorenz concluse dicendo: *“Il semplice battito d’ali di un gabbiano può cambiare per sempre l’evoluzione di un sistema meteorologico”*.



- Nel 1972 Lorenz cambiò metafora, intitolando una sua conferenza: *“Predicibilità: può il battito d’ali di una farfalla in Brasile scatenare un tornado in Texas?”*, da cui il celebre **“effetto farfalla”**, sinonimo di sensibilità alle condizioni iniziali e quindi di caos.



- Calcolo dell'esponente di Lyapunov  $\lambda$  per stimare la divergenza tra orbite inizialmente vicine
- $d_0$  è la distanza iniziale e  $d$  è la distanza al tempo  $t$ .

➤ Un sistema dinamico si dice **caotico** se presenta le seguenti caratteristiche:

- sensibilità alle condizioni iniziali, ovvero a variazioni infinitesime della scelta dei dati di partenza;
- imprevedibilità, cioè non si può prevedere l'evoluzione del sistema;
- le orbite restano generalmente confinate, cioè il sistema non evolve verso l'infinito.

➤ *OSSERVAZIONE: dire che un sistema è caotico NON vuole dire che sia instabile, ma piuttosto che sia imprevedibile.*

# 7. Sistema solare: ordine o caos?

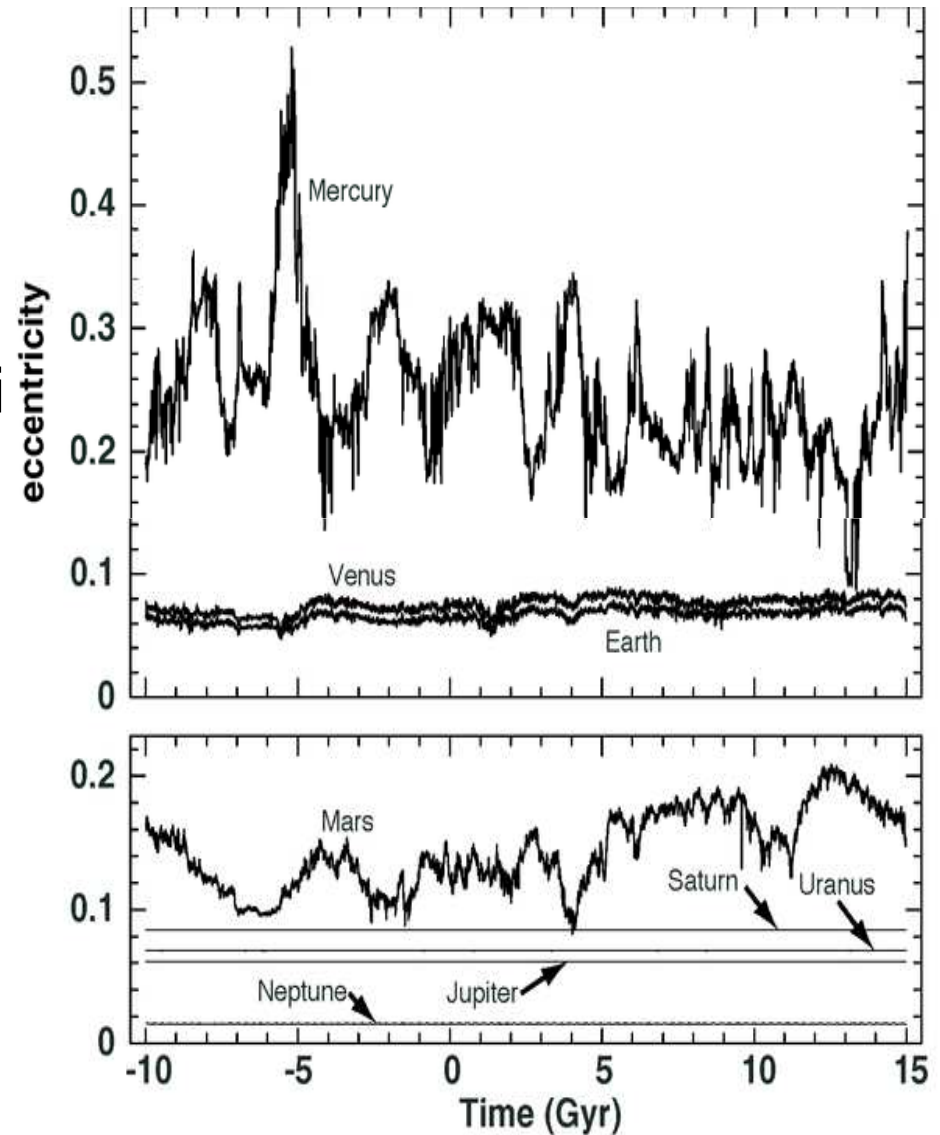
- **Metodi analitici:** Teoria perturbativa, teorema di Kolmogorov-Arnold-Moser (metodo superconvergente), teorema di Nekhoroshev (stabilità per tempi esponenziali).
- Le dimostrazioni più efficaci sono *computer-assisted*: il computer consente di effettuare calcoli lunghi e si applica la tecnica dell'*aritmetica degli intervalli* per controllare gli errori di arrotondamento introdotti dal computer.
- Con questa tecnica si è arrivati a dimostrare la stabilità di semplici problemi a 3 corpi per valori realistici dei parametri (rapporto delle masse, eccentricità e semiasse maggiore).

- **Metodi numerici:** tramite integrazioni al computer partendo da una soluzione matematica approssimata.
- G.J. **Sussman** e J. **Wisdom** (MIT, 1990) costruirono il *Digital Orrery*, un computer dedicato alla simulazione di Giove, Saturno, Urano, Nettuno e Plutone.
- L'integrazione delle equazioni di Newton mostrava che su 845 milioni di anni gli 8 *planeti sono caotici (su tempi variabili) o regolari (cambiando le condizioni iniziali)*, mentre *Plutone ha un comportamento decisamente caotico*.





- Nello stesso periodo J. [Laskar](#) (BdL, Parigi) applicò una procedura numerica basata sulla teoria perturbativa allo studio di tutti i pianeti (escluso Plutone) per tempi da -15 a 10 miliardi di anni.
- I pianeti esterni sono regolari
- *Venere e Terra moderatamente caotici,*
- *Mercurio e Marte decisamente caotici*
- Per il sistema solare interno non si possono fare previsioni attendibili oltre i 100 milioni di anni.



- **W.B. Hayes (2007)**: L'incertezza osservativa nelle condizioni iniziali dei pianeti esterni è  $1/10.000.000$ . Entro questo intervallo esistono sia moti **regolari** che **caotici**! Alcuni con tempi di Lyapunov di 2 milioni di anni, altri di 230 milioni di anni, altri ancora regolari almeno fino a 1 miliardo di anni.
- Dunque, studi diversi con condizioni iniziali vicine possono portare a risultati contrastanti.
- Le condizioni iniziali più autorevoli che meglio si adattano con le osservazioni, DE405 (effemeridi del JPL), non mostrano evidenza di caos dopo 1 miliardo di anni.

## RIASSUMENDO:

- Mercurio e Marte **caotici**
- Venere e Terra **moderatamente caotici**,
- i pianeti esterni (Giove, Saturno, Urano, Nettuno) sono **regolari** o **caotici** (a seconda delle condizioni iniziali)
- Plutone decisamente **caotico**.

... **Morale della storia:** gli 8 pianeti e Plutone sono caotici e NON si possono effettuare previsioni attendibili per la Terra oltre i 100 milioni di anni...

- **E gli altri oggetti del sistema solare?**

- Pianeti nani, asteroidi, comete, oggetti di Kuiper possono essere regolari (come Cerere) o caotici, con il pericolo che si scontrino con la Terra.

- ***Apophis*** (il distruttore): 350 metri, 46 miliardi di kg.

- Avvicinamento alla Terra: 13 Aprile 2029



- Possibile collisione con la Terra: 13 Aprile 2036  
(fortunatamente la probabilità è molto bassa,  
da 1/6000 nel 2005 a 1/250.000 nel 2009)



## 8. Conclusione

- L'umanità ha sempre osservato un cielo immobile, ma non dimentichiamo che il Sole diventerà una **gigante rossa**...
- Studi al computer hanno mostrato che i pianeti interni sono caotici (gli esterni non sappiamo...)
- Asteroidi, comete, oggetti di Kuiper: possono avere un destino **REGOLARE** o **CAOTICO**.

- **OSSIMORO**, dal greco ὀξύμωρον: è una figura retorica che consiste nell'accostamento di due termini in forte antitesi.
- *Un urlo pacato*
- *Un silenzio assordante*
- *Affrettati lentamente*
- *“Naufragar m’è dolce in questo mare...”*

***OSSIMORO PLANETARIO:***

**II REGOLARE DISORDINE DEL  
SISTEMA SOLARE**

*oppure*

**LA CAOTICA ARMONIA DEL  
SISTEMA SOLARE !**