Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Appello X - 15 settembre 2006

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1.

(a) Dare la definizione di radice primitiva dell'unità modulo un intero.

(b) Determinare tutte le radici primitive (mod 13).

(c) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{Z}$ la congruenza $4X^8 \equiv 7a(\text{mod } 13)$ è risolubile.

(d) Risolvere la congruenza per il minimo valore di $a > 0$ per cui ha soluzione.

Esercizio 2.

(a) Sia p un primo e siano $a, b \in \mathbb{Z}$, tali che $\text{MCD}(a, p) = \text{MCD}(b, p) = 1$. Supponiamo che $X^2 \equiv a(\text{mod } p)$ e $X^2 \equiv b(\text{mod } p)$ non siano risolubili. Determinare se $X^2 \equiv ab(\text{mod } p)$ è risolubile.

(b) Siano $a \in \mathbb{Z}$ e p, q primi dispari. Supponiamo che a sia un residuo quadratico (mod p) e (mod q). Determinare se a è un residuo quadratico (mod pq).

(c) Determinare per quali valori di λ la congruenza $X^2 + 5X + 2 + \lambda \equiv 0(\text{mod } 13)$ ha soluzione e risolverla per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui ha soluzione.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione diofantea in due indeterminate:

$$5\lambda X + 10Y = \lambda.$$

(a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione diofantea ha soluzione.

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea per il più piccolo $\lambda > 0$ per cui l'equazione ha soluzione.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X + 2Y \equiv 3 + \lambda(\text{mod } 7) \\ X + 4Y \equiv 0(\text{mod } 7) \end{cases}$$

(a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ il sistema ha soluzione.

(b) Risolvere il sistema per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui ha soluzione.

Esercizio 5

(a) Sia $F = \mu * \phi\sigma$. Calcolare $F(33)$ e $F^{-1}(33)$.

(b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(33)$.

Esercizio 6 Si consideri la successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dei numeri di Fibonacci definita per induzione in questo modo: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

(a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, F_n e F_{n+1} sono coprimi.

(b) Dimostrare che per ogni $n, m \geq 1$, $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$.

(c) Dimostrare che se $m \mid n$ allora $F_m \mid F_n$ (Suggerimento: porre $m = nh$ e ragionare per induzione su h).