

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Appello C - 9 febbraio 2007

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1.

- (a) Determinare tutte le radici primitive (mod 19).
- (c) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{Z}$ la congruenza $7X^8 \equiv 5a \pmod{19}$ è risolubile.
- (d) Risolvere la congruenza per $a = 17$.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di λ la congruenza

$$3X^2 - 7\lambda X + 2\lambda^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

ha soluzione e risolverla per il più piccolo $\lambda > 0$ per cui ha soluzione.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione diofantea in due indeterminate:

$$5X + 10\lambda Y = \lambda.$$

- (a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione diofantea ha soluzione.
- (b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea per il più piccolo $\lambda > 0$ per cui l'equazione ha soluzione.

Esercizio 4 Determinare quali delle seguenti funzioni aritmetiche sono moltiplicative o totalmente moltiplicative (per quelle che non lo sono, dare un controesempio):

- (a) Fissato $k \in \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto \text{MCD}(n, k)$.
- (b) $\pi(n)$, che associa a un numero naturale n il numero di primi minori o uguali a n .
- (c) $\phi * \tau$.
- (d) La funzione costante **2**.
- (e) La funzione costante **1**.
- (f) **1 * 1**.

Esercizio 5 Determinare quali dei seguenti interi sono somma di due quadrati:

$$a = 79625, b = 2310, c = 3185, d = 36864.$$

Determinare, se esiste, una terna pitagorica primitiva (x, y, z) tale che $z = 3185$ e una terna pitagorica primitiva (x', y', z') tale che $z' = 2310$.

Esercizio 6

- (a) Enunciare il teorema di Lagrange sul numero di soluzioni di una congruenza polinomiale modulo un primo p .
- (b) Mostrare che il teorema non è valido modulo un intero n arbitrario.