

Family Name *Name* *Student ID (Matricola):*
 Solve the problems adding to the replies short and essential explanations. *Please write the solutions in the designed areas.*
NO EXTRA SHEETS WILL BE ACCEPTED. 1 Problem = 4 marks. Duration: 2 hours. No questions allowed in the first hour and in the last 20 minutes.

1	2	3a	3b	3c	3d	4	5	6	TOTAL

1. Dimostrare che

$$n! = \prod_{\ell \text{ primo}} \prod_{\alpha=0}^{\infty} \ell^{\lfloor \frac{n}{\ell^\alpha} \rfloor}$$

2. Calcolare la frazione continua di $\sqrt{2} - 1$

3. Sia φ la funzione di Eulero e σ la funzione “somma dei divisori”.

a. Trovare tutti gli interi n tali che $\varphi(n) = 6$.

b. Dimostrare che se n è un intero tale che $\varphi(n) = \varphi(2n)$, allora n è dispari. E' vero anche il viceversa?

c. Dimostrare che $\sigma(n) \geq n + 1$ e che l'uguaglianza vale se e solo se n è primo.

d. Determinare tutti gli interi n tali che $\sigma(n) = 12$.

4. Enunciare e dimostrare la formula delle somme parziali e utilizzarla per dimostrare che se N è pari, allora $\sum_{n \leq N} \frac{(-1)^n}{n} = \int_1^N \frac{A(t)}{t^2} dt$ dove $A(t) = 0$ se $[t]$ è pari e $A(t) = -1$ se $[t]$ è dispari.

5. Sia $d, n, m \in \mathbf{Z}$. Dimostrare che se esistono $x, y, z, t \in \mathbf{Z}$ tali che $n = x^2 + dy^2$ e $m = z^2 + dt^2$, allora esistono $u, v \in \mathbf{Z}$ tali che $nm = u^2 + dv^2$. Usare questo fatto per esprimere 5548 nella forma $Q^2 + 3P^2$

6. Dimostrare che

$$\left(\frac{17}{p}\right)_J = \begin{cases} 1 & \text{se } p \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17} \\ 0 & \text{if } p = 17 \\ -1 & \text{if } p \equiv \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7 \pmod{17}. \end{cases}$$