

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

-
1. Descrivere in dettaglio il metodo risolutivo dell'equazione diofantea $AX + BY + CZ = D$ dove $A, B, C, D \in \mathbf{Z}$.

2. Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ 2x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$ negli intervalli $[100, 300]$.

3. Si enunci e dimostri il Teorema del sollevamento per congruenze polinomiali.

4. Dimostrare che se p è primo, allora $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$.

5. Dimostrare che per ogni primo p , esiste una radice primitiva modulo p .

6. Determinare le soluzioni (se esistono) della congruenza polinomiale $X^5 \equiv 2 \pmod{31}$.

7. Calcolare il seguente simbolo di Jacobi/Legendre: $\left(\frac{1919}{7231}\right)$.

8. Mostrare che l'insieme delle funzioni aritmetiche formano un anello rispetto alla somma naturale e al prodotto di convoluzione. Determinarne le unità.

9. Calcolare $\tau * \tau * \mu(30)$.

10. Mostrare che se $x^2 + y^2 = z^2$ con $x, y, z \in \mathbf{Z}$, allora $60|xyz$.

