Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi
Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

TUTORATO 7
29 APRILE 2010

1. Calcolare il discriminante del p-esimo polinomio ciclotomico, per p numero primo, e del polinomio $X^n - a$, per $a \in \mathbb{Q}$. (*Suggerimento*: usare il secondo esercizio del tutorato precedente. Per chi se la sente: provare a farlo direttamente con la definizione.)

2. Dimostrare che se il campo di spezzamento di un polinomio $f(X)$ è reale allora $D(f) \geq 0$.

3. Dimostrare che il discriminante di un polinomio di quarto grado e della sua risolvente cubica sono uguali. (*Suggerimento*: NON usare la forma esplicita della risolvente cubica.)

La regola dei segni di Cartesio

Diciamo che $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ha una *variazione* (*di segno*) se due suoi termini consecutivi non nulli hanno segno opposto. Allora:

- Il numero delle radici reali positive di $f(X)$ è al più uguale al numero delle variazioni.
- Il numero delle radici reali negative di $f(X)$ è al più uguale al numero delle variazioni di $f(-X)$.

4. Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

   a) $X^4 + 2X + 2$
   b) $4X^4 + 4X + 3$
   c) $X^4 - 6X^2 + 4$
   d) $2X^5 - 10X + 5$
   e) $X^5 - 8X + 2$
   f) $X^5 - 8X^4 + 2X^2 + 2$

5. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $X^5 - 2X^3 + X^2 - 3X + 1$.

6. a) Determinare tutti gli ampliamenti quadratici di $\mathbb{Q}$ contenuti in $\mathbb{Q}(\xi_p)$, per p primo.
   b) Lo stesso ma per $\mathbb{Q}(\xi_n)$, n generico.
   c) Dimostrare che tutti gli ampliamenti quadratici di $\mathbb{Q}$ sono contenuti in un ampliamento ciclotomico (*suggerimento*: $\mathbb{Q}(\xi_n)$ è il composto degli $\mathbb{Q}(\xi_p)$ sui divisori primi di n); determinare esplicitamente un ampliamento ciclotomico che contiene $\sqrt{d}$, per $d = 2, 3, 5, -15, -21$.
   d) Dedurne che se $F = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_k})$ allora F è contenuto in un ampliamento ciclotomico.
   e) Dimostrare che se $\mathbb{Q} \subset F$ è normale e $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} F \simeq \mathbb{Z}_2^k$ per un intero k allora F è contenuto in un ampliamento ciclotomico.
   f) Dimostrare che non esistono n per cui $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\xi_n) \simeq \mathbb{Z}_2^k$ per ogni $k \geq 4$.