Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di TE1

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. F. Pappalardi
Tutori: Annamaria Iezzi e Dario Spirito

Tutorato 3
18 marzo 2010

1. Determinare i campi di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi e calcolarne il grado su $\mathbb{Q}$.
   a) $X^3 - 6$
   b) $X^4 + 30X^2 + 45$
   c) $X^4 + 2X^3 + 4X - 4$

2. Dimostrare che l'applicazione
$$\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{3}$$
non è un omomorfismo di campi.

3. Determinare tutti gli $\mathbb{Q}$-isomorfismi in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi e determinare quali tra di essi sono automorfismi:
   a) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$
   b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$
   c) $\mathbb{Q}(\xi_{13})$
   d) $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{8}})$
   e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \xi_8)$
   f) $\mathbb{Q}(1 + \frac{1}{\pi})$

4. Determinare quali radici dell'unità sono contenute nei seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$:
   a) $\mathbb{Q}(i)$
   b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   c) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
   d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$
   e) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
   f) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$

5. Fattorizzare $\Phi_n(X)$ su $\mathbb{R}[X]$.

6. Sia $A = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$, e si definiscano su di esso le operazioni "+" (l'addizione termine a termine) e "$\circ$" come
$$(a, b) \circ (a', b') = (aa' + 3bb', ab' + a'b)$$
Rispetto a queste due operazioni, A è un anello commutativo unitario con zero $(0, 0)$ e unità $(1, 0)$, nonché uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_5$ con la moltiplicazione scalare termine a termine.
   a) Dimostrare che l'applicazione
$$\psi : \mathbb{F}_5[X] \longrightarrow A, \quad \sum a_i X^i \mapsto \sum a_i (0, 1)^i$$
è un omomorfismo di anelli.

b) Determinare $\ker\psi$ e $\operatorname{Im}\psi$ e definire l'applicazione canonica

$$\overline{\psi} : \frac{\mathbb{F}_5[X]}{\ker\psi} \to \operatorname{Im}\psi$$

c) Usando il punto precedente, mostrare che $K := \operatorname{Im}\psi$ è un campo, ampliamento di $\mathbb{F}_5$; determinare il grado $[K : \mathbb{F}_5]$, una base di K su $\mathbb{F}_5$ e il numero di elementi di K.

7. Sia E un ampliamento di $\mathbb{F}_p$. Dimostrare che l'applicazione

$$\eta : E \longrightarrow E, \quad x \mapsto x^p \tag{1}$$

è un omomorfismo (detto *omomorfismo di Frobenius*); dimostrare inoltre che, se E è finito, η è un automorfismo e trovare un esempio in cui E è infinito ed η non è suriettivo.

8. Dimostrare che un campo finito non può essere algebricamente chiuso. (*Suggerimento*: considerare il polinomio $x^{|E|} - x + 1$.)