COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. È vero che se un campo contiene un elemento trascendente allora ne contiene infiniti?

   ....

   b. È vero che ogni campo finito con $q = 3^k$ elementi è isomorfo al quoziente di un opportuno anello di polinomi?

   ....

   c. É vero che ogni gruppo abeliano finito è il gruppo di Galois su $\mathbf{Q}$ di un sottocampo di un campo ciclotomico?

   ....

   d. Dare un esempio di un polinomio a coefficienti razionali di grado 4 avente gruppo di Galois con 4 elementi e non ciclico.

   ....

2. Dimostrare che se E/F è un estensione algebrica e ogni polinomio in $F[X]$ si decompone completamente in $E[X]$, allora E è algebricamente chiuso.

3. Dopo aver definito la nozione di numero reale costruibile, dimostrare che il campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 16X^2 + 4$ contiene solo numeri costruibili.

4. Determinare gruppo di Galois e campo di spezzamento del polinomio $f(X) = (x^2 - 3)(x^2 + 7)(x^{21} - 1) \in \mathbf{Q}[X]$.

5. Dimostrare che il gruppo di Galois di un polinomio irriducibile di grado 3 in $\mathbf{Q}[X]$ è ciclico se e solo se il suo discriminante è un quadrato perfetto.

6. Si enunci e dimostri il Lemma di Artin.

7. Determinare il reticolo dei sottocampi del campo di spezzamento del polinomio $(X^{2^{12}} - X^{2^4})(X^{24} + X^{16} + 1)(X^5 + X^2 + X + 5) \in \mathbf{F}_2[X]$.

8. Calcolare il polinomio minimo di $\sqrt{1 + \cos(6\pi/7)}$.