COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga:

   a. E' vero che ogni estensione di un campo in caratteristica 0 è normale?

   ....

   b. Fornire un esempio di estensione algebrica dei razionali di grado infinito:

   ....

   c. E' vero che l'ordine del gruppo di Galois di un polinomio di grado n divide $n!$?

   ....

   d. $\mathbf{Q}[2^{1/3}]/\mathbf{Q}$ è un estensione di Galois?

   ....

2. Descrivere gli elementi del gruppo di Galois del polinomio $(x^2 - 2)(x^4 - 4) \in \mathbf{Q}[x]$ determinando anche *alcuni* sottocampi del campo di spezzamento.

3. Dimostrare che se $F[\alpha]$ è un estensione algebrica semplice di un campo F tale che $[F[\alpha] : F]$ è dispari, allora $F[\alpha] = F[\alpha^2]$.

4. Si consideri $E = \mathbf{Q}[\alpha]$ dove α è una radice del polinomio $X^2 - X + 1$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbf{Q}$ di $1/(\alpha + 2)$.

5. Descrivere il reticolo dei sottocampi di $\mathbf{Q}(\zeta_{24})$.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Sia $n \in \mathbf{N}$, sia $K = \mathbf{Q}[\zeta_n]$ e $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Per ogni sottogruppo $H \leq G$, sia $\eta_H = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\zeta_n)$. Dimostrare che $\mathbf{Q}(\eta_H) \subseteq K^H$.

8. Dimostrare che $\mathbf{Q}[\zeta_{13}]$ ha 6 sottocampi (compresi $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}[\zeta_{13}]$). Per ciascuno si calcoli il grado su $\mathbf{Q}$ e si determinino eventuali inclusioni fra di essi.