Teoria di Galois 1 - Tutorato I

Estensioni di campi

Venerdì 4 Marzo 2005

Esercizio 1. Sia E/F un estensione di campi e $S \subseteq E$ un sottoinsieme: Dimostrare che

$$Q(F[S]) = F(S).$$

Esercizio 2. In ciascuno dei seguenti casi, determinare, l'inverso degli elementi assegnati nel campo assegnato:

a. $\mathbb{Q}(\alpha)$ con $\alpha^3 - 5\alpha - 1 = 0$;

$$\alpha + 1 \qquad \alpha^2 + \alpha + 1 \qquad 2 + \alpha;$$

b. $\mathbb{Q}(\lambda)$ con $\lambda^3 - 2\lambda - 2 = 0$;

$$20\lambda \qquad \lambda + 3 \qquad \lambda^5$$

c. $\mathbb{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$:

$$a + b\xi \quad a, b \in \mathbb{Q},\ ab \neq 0;$$

d. $\mathbb{F}_{13}(\zeta)$ con $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$,

$$\zeta^t \quad t \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3. Determinare il polinomio minimo di μ su F in ciascuno dei seguenti casi:

a. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ F = \mathbb{Q}$ $\qquad \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$;

b. $E = \mathbb{Q}(3^{1/4}),\ F = \mathbb{Q}$ $\qquad \mu = 3^{1/4} + 5 \cdot 3^{3/4}$;

c. $E = \mathbb{Q}(5^{1/6}),\ F = \mathbb{Q}(5^{1/2})$ $\qquad \mu = 1 + 5^{1/6} + 3 \cdot 5^{5/6}$;

d. $E = \mathbb{Q}(\tau)$ con $\tau^3 = 3\tau + 2,\ F = \mathbb{Q}$ $\qquad \mu = 2\tau^2 - \tau + 2$;

e. $E = \mathbb{F}_7(\rho)$ con $\rho^3 = \rho + 2,\ F = \mathbb{F}_7$ $\qquad \mu = 1 + \rho$.

Esercizio 4. Dire quali dei seguenti insiemi sono campi e quali no giustificando la risposta:

a. $\mathbb{Q}[x]/(x^5+1)$;

b. $\mathbb{F}_5[x]/(x^2+1)$;

c. $\mathbb{Z}[x]/(x^3+x+1)$;

d. $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]/(x^2-3)$;

e. $\mathbb{Q}[\pi][X]/(X+1)$.

Esercizio 5. In ciascuno dei seguenti casi calcolare $[E:F]$:

a. $E=\mathbb{Q}(2^{1/2},2^{1/3}),\quad F=\mathbb{Q}$;

b. $E=\mathbb{Q}(2^{1/2},2^{1/3},2^{1/4},\cdots,2^{1/20}),\quad F=\mathbb{Q}$;

c. $E=\mathbb{Q}(\sqrt{5},\zeta)$ dove $\zeta^3+\zeta-1=0,\quad F=\mathbb{Q}$;

d. $E=\mathbb{F}_3[\sqrt{-1}],\quad F=\mathbb{F}_3$;

e. $E=\mathbb{F}_5[\sqrt{-1}],\quad F=\mathbb{F}_5$;

f. $E=\mathbb{F}_{31}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{15},\sqrt{10}],\quad F=\mathbb{F}_{31}(\sqrt{10})$.

Esercizio 6. Dimostrare (o dimostrare che sono sbagliate) le uguaglianze dei seguenti campi:

a. $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{6})=\mathbb{Q}(3\sqrt{2}-\sqrt{5}+5\sqrt{3})$;

b. $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2-4b})=\mathbb{Q}(\sigma)$ dove $\sigma^2+a\sigma+b=0,\, a,b\in\mathbb{Q}$;

c. $\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{3})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{-6})=\mathbb{Q}(i)$;