

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA .....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Calcolare il polinomio minimo su  $\mathbf{Q}$ , di  $(2 - \cos(\pi/4))^{1/3}$ .
2. Mostrare che due campi di spezzamento dello stesso polinomio sono isomorfi.
3. Determinare tutti i sottocampi quadratici di  $\mathbf{Q}(\zeta_{77})$ .
4. Mostrare che per ogni primo  $p$  e  $n \in \mathbf{N}$  esiste un unico campo finito a meno di isomorfismi.
5. Calcolare il numero di elementi del gruppo di Galois su  $\mathbf{Q}$  del polinomio  $x^6 - 2$ .
6. Spiegare come si fa a calcolare il gruppo di Galois di un polinomio di grado 4.
7. Costruire un'estensione  $F$  di Galois di  $\mathbf{Q}$  tale che  $\text{Gal}(F/\mathbf{Q}) \simeq C_9 \times C_9$  spiegando la teoria usata.
8. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.
9. Si calcoli il numero di elementi nel campo di spezzamento del polinomio  $x^9 + x^5 + x$  su  $\mathbf{F}_2$ .
10. Dare un esempio di campo finito  $\mathbf{F}_{16}$  con 16 elementi determinando tutti i generatori del gruppo moltiplicativo  $\mathbf{F}_{16}^*$ .
11. Mostrare che i polinomi a coefficienti in un campo finito hanno gruppo di Galois ciclico.
12. Esibire (se esiste) una costruzione del numero  $((2 + \sqrt{2})^{1/4} + 1)^{1/8}$ .