COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. Quali possono essere tutti i possibili gruppi di Galois dei polinomi di grado 4 su $\mathbf{Q}$ e su $\mathbf{F}_2$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^4 - \sqrt{3} \in \mathbf{Q}[\sqrt{3}][X]$.

   ....

   c. È vero che due polinomi in $\mathbf{F}_p[X]$ aventi lo stesso grado potrebbero avere campi di spezzamento non isomorfi?

   ....

   d. Elencare tutti i polinomi irriducibili (monici) di grado minore di 5 su $\mathbf{F}_2$.

   ....

   e. Si scriva un costruzione di $\cos 2\pi/32$ utilizzando la formula di duplicazione $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.

   ....

2. Descrivere il metodo per calcolare il gruppo di Galois di tutti i possibili polinomi di grado quattro e lo si applichi nel caso del polinomio $X^4 + 1$.

3. Dopo aver definito la nozione di polinomio primitivo in $\mathbf{F}_p[X]$, si dinostri che se $p = 1+2l$ con l primo della forma $l = 6q-1$ con q primo dispari, allora il numero di polinomi primitivi di grado 2 in $\mathbf{F}_p[X]$ è pari a $4 * (l-1)(q-1)$. Verificare che questa situazione si presenta, ad esempio, quando $q = 5$ e quando $q = 7$,

4. Descrivere il gruppo di Galois del polinomio $(X+5)^6+3$ specificandone l'ordine.

5. Dopo aver definito la nozione di polinomio ciclotomico ed averne elencato alcune proprietà fondamentali, dimostrare che se p è primo, allora $(X^{p^{k+1}}-1)/(X^{p^k}-1)$ è il p^k–esimo polinomio ciclotomico.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois dimostrandone alcune parti.

7. Dopo averne determinato i fattori irriducibili, si calcoli il numero di elementi nel campo di spezzamento del polinomio $(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^{15} + x^{10} + 1)(x^{25} + 5x^3 + 1)$ su $\mathbf{F}_5$

8. Dopo aver dimostrato che è un estensione di Galois di $\mathbf{Q}$, determinare tutti i sottocampi di $\mathbf{Q}(\zeta_{26})$.