COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 5 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	TOT.
....									

1. Rispondere alle sequenti domande fornendo una giustificazione di una riga (giustificazioni incomplete o poco chiare comportano punteggio nullo):

   a. È vero che ogni gruppo abeliano finito è il gruppo di Galois di qualche polinomio irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$?

   ....

   b. Scrivere una $\mathbf{Q}[i]$–base del campo di spezzamento del polinomio $X^4 - 2 \in \mathbf{Q}[i][X]$.

   ....

   c. È vero che se K ha caratteristica p allora il polinomio $X^p - X + 1$ non ha radici in K?

   ....

   d. È vero che se E/F è un estensione finita, allora il numero di F–endomorfismi è sempre al più $[E : F]$?

   ....

   e. Sia $E/\mathbf{Q}$ un estensione di Galois tale che $\#\mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q}) = 2^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{N}$). È vero che $E \cap \mathbf{R}$ contiene solo numeri costruibili?

   ....

2. Dato un gruppo finito G, dimostrare che esiste una estensione di campi E/F opportuna tale che $\mathrm{Gal}(E(F) \cong G$.
Suggerimento: Usare il Teorema di Cayley, il fatto che l'enunciato è vero per $G = S_n$ e il Teorema di Corrispondenza.

3. Dimostrare che se $p > 5$ è primo tale che $(p-1)/2$ è primo, allora $\mathbf{Q}[\zeta_{p^\alpha}]$ ammette esattamente 4α sottocampi. Dedurne la struttura del reticolo dei sottocampi di $\mathbf{Q}[\zeta_{49}]$.

4. Calcolare il gruppo di Galois del polinomio $(X^3-5)(X^3-2)(X^3-7) \in \mathbf{Q}[X]$.

5. Dimostrare che se $p \geq 3$ è primo, allora il discriminante di $X^p - 2$ è $(-1)^{(p-1)/2}2^{p-1}p^p$.
Suggerimento: Usare la formula per il discriminante che ha a che fare con la derivata prima.

6. Si enunci nella completa generalità il Teorema di corrispondenza di Galois.

7. Scrivere tutti i fattori irriducibili del polinomio $(X^{2^3} - X)(X^{2^2} - X) \in \mathbf{F}_2[X]$.

8. Dato $f \in \mathbf{Q}[X]$ irriducibile di grado n, dimostrare che se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$, allora $(cX+d)^n f((aX+b)/(cX+d))$ ha lo stesso campo di spezzamento di $f(X)$.