Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2009/2010
AL2 - Algebra 2
Esercitazione 4
Lunedì 23 Novembre 2009
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/CORSI/AL2_09_10/AL2.htm
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. (Dikranjan - Aritmetica e Algebra - es. 9.1) Provare che un anello A è privo di divisori destri dello zero se, e solo se, è privo di divisori sinistri dello zero.

   Soluzione:

   Supponiamo A privo di divisori sinistri dello zero. Sia $a \in A$ non nullo, allora se $\exists b \in A$ tale che $ba = 0$ si deve avere $b = 0$, altrimenti b sarebbe un divisore sinistro dello zero. Perciò A è privo di divisori destri dello zero. Il viceversa è analogo.

2. (Dikranjan - Aritmetica e Algebra - es. 9.15)

   Siano I_1, I_2 due ideali sinistri (risp. destri) di un anello A. Provare che $I_1 + I_2 := \{i_1 + i_2 \mid i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}$ è un ideale sinistro (risp. destro) di A.

   Soluzione:

   Prima di tutto verifichiamo che $I_1 + I_2$ è un sottogruppo di $(A, +)$: siccome I_1 e I_2 sono non vuoti anche $I_1 + I_2$ è non vuoto; siano poi $i_1 + i_2, j_1 + j_2 \in I_1 + I_2$, allora $i_1 + i_2 - j_1 - j_2 = i_1 - j_1 + i_2 - j_2$, con $i_1 - j_1 \in I_1$ e $i_2 - j_2 \in I_2$ (dato che I_1 e I_2, per def. di ideale , sono sottogruppi di $(A, +)$), quindi $i_1 + i_2 - j_1 - j_2 \in I_1 + I_2$.

   Verifichiamo poi che $\forall a \in A, \forall i_1 + i_2 \in I_1 + I_2$ si ha $a(i_1 + i_2) \in I_1 + I_2$ (risp. $(i_1 + i_2)a \in I_1 + I_2$). Infatti $a(i_1 + i_2) = ai_1 + ai_2 \in I_1 + I_2$ perché I_1 e I_2 sono ideali sinistri (risp. $(i_1 + i_2)a = i_1 a + i_2 b \in I_1 + I_2$ perché I_1 e I_2 sono due ideali destri)

3. Sia $n \in \mathbb{N}^+$. Dimostrare che ogni ideale bilatero dell'anello $M_n(\mathbb{R})$ è banale.

   Soluzione:

   Se $n = 1$ allora $M_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ che è un campo e quindi è privo di ideali non banali.

   Sia $n \geq 2$. Siano $1 \leq i, j \leq n$, sia $E(i, j)$ la matrice i cui elementi sono tutti nulli, salvo $E(i, j)_{ij} = 1$. Sia J un ideale bilatero di $M_n(\mathbb{R})$, non nullo. Allora esiste $M \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $M \neq 0, M \in J$. Quindi esistono $1 \leq i, j \leq n$ tali che $M_{ij} \neq 0$. Allora per ogni $1 \leq h \leq n$, $\frac{1}{M_{ij}} E(h, i) M E(j, h) = E(h, h)$, quindi $E(h, h) \in J$. Ma allora $Id = \sum_{h=1}^{n} E(h, h) \in J$, quindi $J = M_n(\mathbb{R})$.

4. Siano $I = (n), J = (m)$ ideali di $\mathbb{Z}$. Dimostrare che

(a) $I \cap J = (mcm(n, m))$.

(b) $I + J = (MCD(n, m))$.

Soluzione:

(a) Sia $x \in I \cap J$, allora $n|x$ e $m|x$, quindi $mcm(n, m)|x$, cioè $x \in (mcm(n, m))$. Viceversa sia $x \in (mcm(n, m))$, allora $mcm(n, m)|x$ da cui $n|x$ e $m|x$, quindi $x \in I \cap J$.

(b) Sia $x \in I + J$, allora $x = an + bm$ e quindi $MCD(n, m)|x$, perciò $x \in (MCD(n, m))$. Viceversa: dati n, m esiste un'identità di Bezout, quindi esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(n, m) = an + bm$, quindi $MCD(n, m) \in I + J$, da cui $(MCD(n, m)) \subseteq I + J$.

5. (Dikranjan - Aritmetica e algebra - esercizio 9.23)

Sia A un anello commutativo unitario e a un elemento di A.

(a) Dimostrare che se a è nilpotente allora $1 + a$ è invertibile.

(b) Dimostrare che se a è nilpotente e u è invertibile allora $u + a$ è invertibile.

(c) Dimostrare che l'insieme $N(A)$ di tutti gli elementi nilpotenti di A è un ideale.

(d) Calcolare $N(\mathbb{Z}_{p^n})$ dove p è un primo e $n \in \mathbb{N}^+$

Soluzione:

(a) Per definizione esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n = 0$. Allora si verifica facilmente che $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$ è l'inverso di $1 + a$.

(b) $u + a = u(1 + u^{-1}a)$. Per il punto precedente $(1 + u^{-1}a)$ è invertibile, e quindi anche $u(1 + u^{-1}a)$ è invertibile.

(c) Siano $a, b \in N(A)$, quindi $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tali che $a^n = 0$, $b^m = 0$. Allora $(a + b)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} a^k (-b)^{n+m-1-k} = 0$, dato che se $k < n$ allora $n + m - 1 - k \geq m$. Quindi $N(A)$ è un sottogruppo di A. Inoltre per ogni $x \in A$ $(ax)^n = a^n x^n = 0$, perciò $N(A)$ è effettivamente un ideale.

(d) Sia $[i] = [i]_{p^n} \in N(A)$, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $[i]^m = 0$, cioè $p^n | i^m$, da cui $p | i^m$ e quindi $p | i$. Viceversa, se $p | i$ allora $[i]^n = 0$ e quindi $[i] \in N(A)$. Dunque $N(A) = \{[i]_{p^n} \mid 0 \leq i \leq p^n - 1 \text{ e } p | i\}$. Ad esempio $N(\mathbb{Z}_9) = \{[0], [3]\}$.