Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 5 - 25 Ottobre 2010
Tutore: Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Dire quale dei seguenti gruppi è esprimibile come prodotto diretto o semidiretto di due sottogruppi:

i) $(\mathbb{Z}, +)$; *ii)* $(\mathbb{Z}_8, +)$;
iii) $(D_4, \circ)$; *iv)* $(\mathbb{Z}_6, +)$;
v) $(\mathbb{C}, +)$ *vi)* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Esercizio 2.
Sia G un gruppo di ordine $o(G) = 2p^2$, con $p \neq 2$ primo. Provare che:

a) Se H è un sottogruppo normale proprio di G con $o(H) \neq p$, allora G/H è abeliano;

b) Se $o(H) = p$ e G/H è abeliano, allora G/H è ciclico;

c) Se G' è un gruppo con $o(G') = 2p$, allora per ogni omomorfismo suriettivo $\varphi : G \longrightarrow G'$, $Ker\varphi$ risulta ciclico;

d) Nel caso particolare $G = (\mathbb{Z}_{50}, +)$ e $G' = (\mathbb{Z}_{10}, +)$, trovare gli omomorfismi suriettivi da G su G' e determinarne il nucleo.

Esercizio 3.
Sia $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$, dimostrare che $ord((g_1, \ldots, g_k)) = m.c.m(ord(g_i))$.
Derivare che G è ciclico $\Leftrightarrow$ G_i è ciclico $\forall i$ e M.C.D($|G_i|, |G_j|$)=1 $\forall i \neq j$.
Dimostrare inoltre che $\forall\ H = H_1 \times \cdots \times H_k$ t.c. $H_i \trianglelefteq G_i \forall k \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Esercizio 4.
Sia G un gruppo abeliano di ordine dispari, dimostrare che la corrispondenza che manda ogni elemento nel suo quadrato è un automorfismo

Esercizio 5.
Sia $G = \mathbb{Z}$, $H = 6Z$, $N = 4Z$ esibire un isomorfismo tra $\frac{\frac{G}{H \cap N}}{\frac{H}{H \cap N}}$ e Z_6.

Esercizio 5.
Dimostrare che A_4 non ha sottogruppi di ordine 6.

Esercizio 6.
Siano $(G, +)$ e $(G', +)$ due gruppi abeliani. Sia $Hom(G, G')$ l'insieme degli omomorfismi da G in G'. Si consideri l'applicazione

$$+ : Hom(G, G') \times Hom(G, G') \longrightarrow Hom(G, G')$$

tale che $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$.

a) Dimostrare che $+$ è effettivamente un'operazione binaria.

b) Dimostrare che $(Hom(G, G'), +)$ è un gruppo abeliano.

Si consideri ora l'applicazione $f : (Hom(Z_n, Z_m), +) \rightarrow (Z_m, +)$ definita come $f(\varphi) := \varphi([1]_n)$.

c) Dimostrare che f è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

d) Trovare l'immagine di f e dire a quale gruppo è isomorfo $Hom(Z_n, Z_m)$.

Sia ora $Aut(\mathbb{Z}_n)$ l'insieme degli automorfismi di $\mathbb{Z}_n$. Mostrare che:

e) $(Aut(\mathbb{Z}_n), +) \subseteq (Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n), +)$ non è un sottogruppo

f) $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ è un gruppo

g) $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ è isomorfo a $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$.

h) Trovare tutti gli automorfismi di Z_{18}

Si consideri infine il gruppo degli endomorfismi di $\mathbb{Z}$. Sia $\nu_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la moltiplicazione per a, i.e. $\nu_a(x) = ax$.

i) Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\nu_a \in Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$

j) Applicando il teorema di omomorfismo dire a cosa è isomorfo $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$