Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 1 (6 Ottobre 2010)

Esercizio 1. Siano $(G, \star)$ e $(H, \bullet)$ due gruppi.

(a) Mostrare che l'insieme $G \times H$ è un gruppo rispetto all'operazione binaria $\cdot$ così definita:

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \star g', h \bullet h'), \qquad (g, h), (g', h') \in G \times H.$$

(b) Dimostrare che $\overline{H} := \{(g, e_H) : g \in G\}$ e $\overline{G} := \{(e_G, h) : h \in H\}$ sono sottogruppi di $G \times H$.

(c) Dimostrare che $D := \{(g, g) : g \in G\}$ è un sottogruppo di $G \times G$.

Soluzione:

(a) Dobbiamo verificare che:

- $\cdot$ è associativa:
  $((g,h)(g',h'))(g'',h''') = (g \star g', h \bullet h')(g'', h'') = ((g \star g') \star g'', (h \bullet h')h'') = (g \star (g' \star g''), h \bullet (h' \bullet h'')) = (g,h)((g',h')(g'',h''))$.
- In $G \times H$ esiste l'elemento neutro:
  Siano e_G, e_H gli elementi neutri rispettivamente di G, H. Allora $(g,h)(e_G, e_H) = (g \star e_G, h \bullet e_H) = (g,h)(e_G \star g, e_H \bullet h) = (e_G, e_H)(g,h)$.
- Per ogni elemento in $G \times H$ esiste il suo inverso:
  $(g,h)(g^{-1}, h^{-1}) = (g \star g^{-1}, h \bullet h^{-1}) = (e_G, e_H) = (g^{-1} \star g, h^{-1} \bullet h) = (g^{-1}, h^{-1})(g,h)$.

(b) Facciamo vedere che dati $h, h' \in H$ si ha: $(e_G, h)(e_G, h')^{-1} \in \overline{H}$: $(e_G, h)(e_G, h')^{-1} = (e_G, h)(e_G, h'^{-1}) = (e_G \star e_G, h \bullet h'^{-1}) \in \overline{H}$, poiché $h \bullet h'^{-1} \in H$.

La dimostrazione per $\overline{G}$ è analoga.

(c) Siano $g, g' \in G$, allora si ha: $(g,g)(g',g')^{-1} = (g,g)(g'^{-1}, g'^{-1}) = (g \star g'^{-1}, g \star g'^{-1}) \in D$.

Esercizio 2. Sia X un insieme e si denoti con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Mostrare che $\mathcal{P}(X)$ è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di *differenza simmetrica*, Δ, definita come segue:

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \qquad A, B \in \mathcal{P}(X).$$

Calcolare l'ordine degli elementi di $\mathcal{P}(X)$.

Soluzione:
Per dimostrare che $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ è un gruppo abeliano dobbiamo verificare che:

1. Δ è un'operazione binaria associativa;
2. $\exists N \in \mathcal{P}(X)$ tale che $\forall A \in \mathcal{P}(X),\ N\Delta A = A\Delta N = A$;
3. $\forall A \in \mathcal{P}(X)\ \exists \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$ tale che $A\Delta\overline{A} = \overline{A}\Delta A = N$;
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A\Delta B = B\Delta A$.

1. Δ chiaramente è un'operazione binaria, dato che è un'applicazione da $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{P}(X)$. L'associatività è lasciata per esercizio.
2. Sia $N = \emptyset$. Allora per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$, $A\Delta N = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A = N\Delta A$.
3. Dato $A \in \mathcal{P}(X)$ sia $\overline{A} := A$. Allora $A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$.
4. Per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$ si ha $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (B\setminus A)\cup(A\setminus B) = B\Delta A$.

Dato che ogni elemento è inverso di se stesso allora ogni elemento, eccetto l'elemento neutro, ha ordine 2. L'elemento neutro (cioè l'insieme vuoto) ha ordine 1.

Esercizio 3. Si provi che l'insieme:

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R};\ a, b \text{ non contemporaneamente nulli} \right\}$$

è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ (con l'usuale prodotto righe per colonne).

Soluzione: Innanzitutto $I_2 \in S$. Osserviamo che la condizione a, b non contemporaneamente nulli è equivalente a $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$. Dunque $S \subseteq GL_2(\mathbb{R})$.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

e dunque anche $A^{-1} \in S$. Siano ora:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in S \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix},$$

con $a' := ac - bd$ e $b' = ad + bc$. Resta da far vedere che a' e b' non possono essere contemporaneamente nulli, o equivalentemente che $(a')^2 + (b')^2 \neq 0$. Si ha che:

$$(a')^2 + (b')^2 = a^2b^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd = a^2b^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \neq 0.$$

Esercizio 4. Si dimostri che:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

è un sottogruppo ciclico di $GL_3(\mathbb{R})$.

Soluzione: Facciamo vedere che H è generato dal seguente elemento:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per induzione su $n \geq 1$. La base dell'induzione è facilmente verificata, supponiamo dunque che:

$$A^{n-1} := \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $n < 0$ si ha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e, anche in questo caso, $A^{-n} = (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{(-n)^2+n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dunque H è generato da A.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ generato dai vettori e_1, e_2 ed e_3. Si dimostri che il sottoinsieme $W := \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo di V. Descrivere le classi laterali destre e sinistre di W.

Soluzione: W è non vuoto; inoltre $\forall w_1 = ae_1 + be_2, w_2 = ce_1 + de_2 \in W$ si ha $w_1 - w_2 = (a-c)e_1 + (b-d)e_2 \in W$, quindi W è un sottogruppo. Si osservi, poi, che essendo V abeliano le classi laterali destre e sinistre coincidono. Si ha: $v + W = \{v + ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}^3\}$; se $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ allora $v + W = ze_3 + W$ e $ze_3 + W = z'e_3 + W \Leftrightarrow z = z'$.

Esercizio 6. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Un sottoinsieme H di G si dice *stabile* se per ogni $a, b \in H$ si ha $ab \in H$. Dimostrare che un sottoinsieme stabile e non vuoto di un gruppo finito G è un sottogruppo di G.

Soluzione: Dobbiamo verificare che l'inverso di ogni elemento di H appartiene ad H, da cui seguirà che anche l'elemento neutro $e_G \in H$.

Poiché $H \neq \emptyset$ esiste $a \in H$. L'ordine di a in G è finito perché G è un gruppo finito. Sia $k := o(a)$. Essendo H stabile, non è difficile dimostrare che $a \in H \Rightarrow a^{k-1} = a^{-1} \in H$. Dunque $e_G = a^k = a^{k-1}a \in H$.

Esercizio 7. Dimostrare che in un gruppo abeliano G gli elementi di ordine finito formano un sottogruppo di G.

Soluzione: Siano $a, b \in G$ di ordine finito, rispettivamente uguale ad m ed n. Poiché G è abeliano si ha: $(ab)^{mn} = a^m b^n = e_G$ e dunque l'ordine di ab è finito (e divide mn). Inoltre se a è di ordine finito allora $o(a^{-1}) = o(a)$ è finito.

Esercizio 8. Si dimostri che $V := \{\mathrm{id}, (13)(24), (14)(23), (12)(34)\}$ è un sottogruppo di A_4. Calcolare le sue classi laterali destre e sinistre e stabilire se è normale.

Soluzione:

(a) Facciamo vedere che V è un sottogruppo di A_4. Si vede facilmente che ogni elemento di V è inverso di se stesso. Inoltre si ha:

$$\begin{aligned}
(13)(24)(14)(23) &= (12)(34) = (14)(23)(13)(24) \\
(14)(23)(12)(34) &= (13)(24) = (12)(34)(14)(23) \\
(12)(34)(13)(24) &= (14)(23) = (13)(24)(12)(34)
\end{aligned}$$

e dunque V è un sottogruppo (abeliano) di A_4.

(b) Dal Teorema di Lagrange segue che il numero di laterali destri (equivalentemente, sinistri) di V in A_4 è 3. Le classi laterali di V sono:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \circ V &= V \circ \mathrm{id} = V \\
(123) \circ V &= \{(123), (243), (142), (134)\} = V \circ (123) \\
(132) \circ V &= \{(132), (234), (124), (143)\} = V \circ (132).
\end{aligned}$$

Dunque V è normale in A_4. Si noti che il calcolo dell'ultimo laterale è ridondante al fine di stabilire se V è normale. Infatti, da $(123) \circ V = V \circ (123)$, essendo $[A_4 : V] = 3$, necessariamente $(132) \circ V = V \circ (132)$.