Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL1 - Algebra 1: Fondamenti
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 2 - 16 Ottobre 2008
Elisa Di Gloria, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita dalla legge $f(x) = \frac{x^2+x}{a}$ con $a \in \mathbb{N}$. Per quali valori di a essa é un'applicazione? E in tali casi é iniettiva?

Esercizio 2.
Stabilire se le seguenti applicazioni sono iniettive e/o suriettive e calcolarne, quando possibile, l'inversa.

- $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$
  $x \longmapsto \frac{x-3}{2}$
- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1, & x \text{ pari} \\ -\frac{x+1}{2}, & x \text{ dispari} \end{cases}$
- $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$
  $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longmapsto [x]$ ove con $[x]$ si indica la parte intera di x

Trovare in ognuno dei casi precedenti le controimmagini $f^{-1}(15)$.

Esercizio 3.
Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é un'applicazione ed A_1, A_2 sono sottoinsiemi di A, posto $\varphi(A_1) = B_1 \supseteq B$ e $\varphi(A_2) = B_2 \supseteq B$, provare che:

i) $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$

ii) $\varphi(A_1 \cap A_2) \subseteq \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$.

iii) $\varphi^{-1}(B_1 \cup B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cup \varphi^{-1}(B_2)$

iv) $\varphi^{-1}(B_1 \cap B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cap \varphi^{-1}(B_2)$.

Portare un esempio che illustri come, in generale, in **ii)** non valga l'uguaglianza.

Esercizio 4.
Dire quali delle seguenti leggi sono applicazioni ed, in caso affermativo, se esse sono iniettive e/o suriettive:

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$
  $x \longmapsto \frac{x^3-2x}{6}$

- $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$
  $x \longmapsto \frac{x^2-2}{x+2}$

- $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \frac{2}{x}$

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
  $x \longmapsto (x-1)^4$

Per ognuna delle precedenti applicazioni descrivere l'immagine e determinare la controimmagine $f^{-1}(1)$.

Esercizio 5.
Provare per induzione che:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}.$

- $n! > n^2 \ \forall n \geq 4;$

- $n! > n^3 \ \forall n \geq 6;$

Esercizio 6.
Momento relax:
Trovare l'errore nel seguente procedimento di induzione usato per provare l'affermazione: *Tutti gli uomini hanno lo stesso nome.*
É chiaro che basta provare che in ogni insieme di n uomini, con $n \in \mathbb{N}$, essi hanno lo stesso nome.
La proposizione é vera per insiemi con un solo uomo; supponiamo allora che essa sia vera per insiemi con $n-1$ uomini e proviamola per un insieme con n uomini. Sia allora $I_n = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ un insieme costituito da n uomini, allora $J = \{U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}\}$, essendo formato da $n-1$ uomini, per l'ipotesi induttiva, sará tale che $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ hanno lo stesso nome, diciamo **Franco**; d'altra parte, anche $K = \{U_1, U_2, \ldots, U_{n-2}, U_n\}$ é formato da $n-1$ elementi, e per lo stesso motivo anche $U_1, U_2, \ldots, U_{n-2}, U_n$ hanno lo stesso nome, ma essendo **Franco** il nome di U_1 ne segue anche che U_n si chiama **Franco**. Allora tutti gli uomini in I_n hanno lo stesso nome. Per il principio di induzione,allora, tutti gli uomini si chiamano **Franco**!!!!