Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL1 - Algebra 1: Fondamenti
Prof. F. Pappalardi
Tutorato 10 - 18 Dicembre 2008
Elisa Di Gloria, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Si dimostri che $\varphi(m) = m - 1 \Longleftrightarrow m$ è un numero primo.

Esercizio 2.
Provare che se p è un numero primo diverso da 2,3 e 5, allora p divide il numero $u_p = 111\ldots1 \quad p-1$ volte (i.e. il numero ha $p-1$ cifre uguali a 1).

Esercizio 3.
Siano p e q due numeri primi distinti e sia $a \in \mathbb{Z}$ tale che

$$a^q \equiv a \pmod{p}$$

$$a^p \equiv a \pmod{q}$$

Dimostrare che $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

Esercizio 4.
Sia $a \in \mathbb{Z}$, dimostrare che $10 \mid a^5 - a$.

Esercizio 5.
Dire se e quali dei seguenti sono anelli o campi:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
- $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $m \neq 1$
- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9, +, \cdot)$.

Per ciascuno dei casi precedenti, esplicitare lo zero e l'unità delle operazioni.

Esercizio 6.
Sia S un insieme fissato e $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S. Definiamo su $\mathcal{P}(S)$ le seguenti operazioni: per ogni $A, B \in \mathcal{P}(S)$

$$A + B = A \triangle B$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

Dove $A \triangle B = A \cup B \setminus A \cap B$.
Stabilire se è un anello.
Può essere mai un campo?

Esercizio 7.
Su $\mathbb{Z}$ si definiscano le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} x \oplus y = & \quad x + y - 1 \\ x \otimes y = & \quad xy - x - y + 2 \\ x \star y = & \quad x + y - xy \end{aligned}$$

- Provare che $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ è un anello.
- Provare che $(\mathbb{Z}, \oplus, \star)$ è un dominio.

Si scrivano esplicitamente gli elementi neutri delle tre operazioni.