Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 5
Mercoledì 29 Ottobre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Sia X un insieme non vuoto qualunque e $R = \emptyset$ la relazione vuota. Dire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, totale sono soddisfatte da R.

   R non verifica la proprietà riflessiva, né quella totale, ma verifica le proprietà simmetrica e transitiva.

2. Sia X un insieme finito di cardinalità n e R una relazione d'equivalenza su X di cardinalità anch'essa n. Che si può dire di R?

   R è la relazione "=": infatti, dato che R è una relazione di equivalenza, $\{(x,x)|x \in X\} \subseteq R$. Dato che $|\{(x,x)|x \in X\}| = n$ e anche $|R| = n$ allora $R = \{(x,x)|x \in X\}$, cioè $xRy \Leftrightarrow x = y$.

3. Sia $X := \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Sia R la relazione definita su X nella seguente maniera: $xRy :\Leftrightarrow |x-y| < 2$.

   (a) Descrivere R, trovandone gli elementi, e determinare la più piccola relazione di equivalenza R' t.c. $R' \supseteq R$.

   (b) Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, totale sono soddisfatte da R.

   (a) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6),(6,7),(7,6),(7,7),(7,8),(8,7),(8,8)\}$. R' non può che essere la relazione banale (o caotica) $X \times X$. Infatti, dovendo valere la proprietà transitiva, ogni elemento risulta in relazione con ogni altro: se $x, y \in X$, $x < y$, allora $xR'y$, dato che $xR'(x+1), (x+1)R'(x+2), \ldots, (y-1)R'y$

   (b) R verifica la proprietà riflessiva ($\forall x \in X, 0 = |x-x| < 2$), simmetrica ($|x-y| < 2 \Rightarrow |y-x| = |x-y| < 2$) ma non verifica la proprietà transitiva ($2R3, 3R4$ ma $(2,4) \notin R$) e totale ($(6,4),(4,6) \notin R$).

4. Calcolare quanto bisognerebbe spendere per essere matematicamente sicuri di fare 6 al superenalotto.

   Per essere sicuri di fare 6 bisogna giocare tutte le possibili sestine del superenalotto, cioè tutte le possibili sestine non ordinate scelte nell'insieme $\{1,2,\ldots,90\}$. Per definizione di coefficiente binomiale, il numero delle possibili sestine è $\binom{90}{6} = \frac{90!}{6!(90-6)!} = \frac{90!}{6!84!} = \frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86\cdot85}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 622.614.630$. Ogni sestina costa $0,50$ euro, quindi pagando 311.307.315 euro si è certi di vincere il jackpot.

5. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   Proveremo la formula in tre modi.

(a) Per induzione. Per $n = 0$ la formula è verificata: $1 = 1$. Supponiamo la formula vera per n e dimostriamola per $n + 1$: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) = 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

(b) Sappiamo che $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, perciò $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(c) Considerato un insieme X di n elementi, sia $P_k := \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ t.c. } |A| = k\}, 0 \leq k \leq n$. Chiaramente $\mathcal{P}(X) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k$ è una partizione di $\mathcal{P}(X)$. $\binom{n}{k}$ è il numero delle k-uple non ordinate a valori in X, i.e. $|P_k| = \binom{n}{k}$. Ma allora $|\mathcal{P}(X)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Ma noi già sappiamo che $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$, da cui la tesi.

6. Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Proveremo la formula in 2 modi.

(a) Per induzione. Per $n = 0$ la formula è verificata. Supponiamo allora la formula vera per n e dimostriamola per $n + 1$. $\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = 0 + (n+1)\binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k} = n+1+\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} = n + 1 + n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1}(k + 1)\binom{n}{k} = n + 1 + n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n = (n + 1)2^n$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(n - k)\binom{n}{k} = n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n2^n$. Inoltre, siccome $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, allora $\sum_{k=0}^{n}(n - k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(n - k)\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Perciò $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}$.