Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 12 - esempio di esonero
Mercoledì 7 Gennaio 2009
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/CORSI/AL1_08_09/AL1.htm
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = -2$, scrivendole nella forma $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare $c := MCD(2708, 500)$ e scriverne un'identità di Bézout $c = 2708a + 500b$ con $a \geq 0$.

3. Calcolare $MCD(2^{63} - 1, 2^{36} - 1)$.

4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Dimostrare che G è commutativo se, e solo se, $\forall a, b \in G$ $(ab)^2 = a^2b^2$.

   Se G è commutativo chiaramente, per ogni $a, b \in G$, $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$. Viceversa: dati $a, b \in G$, siccome G è un gruppo, $\exists a^{-1}, b^{-1} \in G$ inversi di a e b. Perciò $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow a^{-1}(ab)(ab)b^{-1} = a^{-1}(aabb)b^{-1}$. Applicando la proprietà associativa di $\cdot$ si ha $ba = ab$, quindi G è commutativo.

5. Trovare tutte le soluzioni, in $\mathbb{Z}_{30}$, dell'equazione $[21]_{30}X = [72]_{30}$.

6. Ada ha invitato da lei cinque amici più Bruno e Carlo. Vuole offrire a ognuno di loro lo stesso numero di cioccolatini, dandone tuttavia uno in più a Bruno e sette in più a Carlo. Ada però non sa se Bruno o/e Carlo accetteranno l'invito. Qual è il numero minimo di cioccolatini che Ada deve acquistare affinché, in ogni caso, alla fine non gliene rimanga nessuno?

7. Dimostrare che ogni numero naturale a che si scrive in base 10 come $a = (a_3a_2a_1a_3a_2a_1)_{10}$ $(0 \leq a_i \leq 9$ per $i = 1, 2, 3)$ è divisibile per 7.

   Sia $b := (a_3a_2a_1)_{10}$. Allora $a = b + 10^3b$. Siccome $10^3 \equiv 3^3 \equiv -1 \mod 7$, allora $a = b + 10^3b \equiv b - b \mod 7$ quindi $7 \mid a$.

8. Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e $a \in \mathbb{N}$ coprimo con n. Dimostrare che se $i \equiv j \mod \phi(n)$ allora $a^i \equiv a^j \mod n$ (dove ϕ è la funzione di Eulero). È vero il viceversa?

9. Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$ e $\tau = (1763)(34) \in S_7$. Determinare la scrittura in cicli disgiunti di σ, τ, σ^{-1}, $\tau\sigma$, τ^5. Calcolare $\text{sgn}(\sigma)$.