CAM - Analisi Uno, a.a. 2003/04

Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esonero del 16 aprile 2004 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la seguente funzione è continua e per quali valori è derivabile

$$f(x) := \begin{cases} a + bx & x \leq 0, \\ e^{3x} - 1 & x > 0. \end{cases}$$

Soluzione f è continua se e solo se $a = 0$, con b qualsiasi. f è derivabile se e solo se $a = 0$ e $b = 3$.

La funzione è continua tutta la retta meno l'origine per ogni parametro a e b; per la continuità di f in 0 si deve avere

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Eseguendo i calcoli, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad f(0) = a.$$

Quindi, la funzione è continua se e solo se $a = 0$, con b qualsiasi. Ricordiamo che se una funzione reale è derivabile allora è continua, quindi occorre studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) := \begin{cases} bx & x \leq 0, \\ e^{3x} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

i.e. trovare i valori di b per i quali si abbia

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

dove $f(0) = 0$.
Si ha

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{bh}{h} = b, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{3h} - 1}{h} = 3.$$

Pertanto, la funzione f è derivabile se e solo se $a = 0$ e $b = 3$.

ESERCIZIO 2

Sia data la funzione $f(x) := \dfrac{1 - 2x}{x - 1} e^x$.
Determinarne insieme di definizione, parità e disparità, segno, limiti ed asintoti, intervalli di monotonia, estremi relativi ed assoluti. Infine, disegnarne un grafico approssimativo.

Soluzione La funzione f è definita per ogni x diverso da 1. f non è né pari né dispari. Osserviamo che e^x è sempre positivo, quindi il segno di f è dato dal segno del termine $\frac{1-2x}{x-1}$:

$$\frac{1-2x}{x-1} \geq 0 \ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Non c'è asintoto obliquo a $+\infty$.
La derivata prima è data da

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}e^x + \frac{1-2x}{x-1}e^x = \frac{3x-2x^2}{(x-1)^2}e^x.$$

Si ha $f'(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$.
Studiando il segno di $f'(x)$, si vede che f è crescente in $(0,1) \cap \left(1, \frac{3}{2}\right)$, decrescente altrimenti.
Da cui, 0 è un minimo relativo, $\frac{3}{2}$ è un massimo relativo.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti integrali.

A) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$; **B)** $\displaystyle\int \frac{x}{\cos x + 1}\,dx$.

Soluzione (A) $-3\ln(|x-1|) + 5\ln(|x-2|) + c$, (B) $x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + c$.

Per il primo integrale, scriviamo

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Segue $A = -3$ e $B = 5$; da cui

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right) dx = -3\ln(|x-1|) + 5\ln(|x-2|) + c.$$

Per il secondo integrale, verifichiamo che $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + 1}\,dx = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

È sufficiente effettuare la sostituzione(1) $t = \tan(\frac{x}{2})$; si ha:

$$\int \frac{1}{\cos x + 1}\, dx = \int \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = \int dt = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

A questo punto, integrando per parti

$$\int \frac{x}{\cos x + 1}\, dx = x \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx = x \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \ln\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + c.$$

ESERCIZIO 4

Calcolare le dimensioni (altezza e lunghezza) del rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio 2.

Soluzione L'area ha un valore massimo quando la lunghezza del rettangolo è $2\sqrt{2}$ e l'altezza è $\sqrt{2}$.

Per descrivere le dimensioni del rettangolo, collochiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ e il rettangolo nel piano cartesiano, scegliendo come centro di $\mathcal{C}$ l'origine degli assi.

Indichiamo con x il vertice inferiore destro ed usiamo l'equazione di $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$.
Si ha:

- lunghezza: $2x$;
- altezza: $\sqrt{4 - x^2}$;
- area: $2x\sqrt{4 - x^2}$.

Pertanto, dobbiamo trovare il massimo assoluto della funzione $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$. nell'intervallo $0 \le x \le 2$.
Esaminiamo i valori di A nei punti critici e negli estremi del dominio.
La derivata è data da

$$A'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}.$$

$A'(x)$ non e' definita quando $x = 2$ e si annulla per $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Nel nostro intervallo, $0 \le x \le 2$, si ha

---

[1] Si può vedere anche direttamente usando $\cos x = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$.

- valori nei punti critici: $A(\sqrt{2}) = 4$ e $A(2) = 0$;
- valori negli estremi del dominio: $A(0) = 0$ e $A(2) = 0$.

Quindi, l'area ha un valore massimo 4 quando la lunghezza del rettangolo è $2\sqrt{2}$ e l'altezza è $\sqrt{2}$.

ESERCIZIO 5

A) Dare le definizioni di funzione derivabile in un punto x_0 e di funzione convessa in un intervallo I della retta reale; enunciare una condizione necessaria e sufficiente di convessità per le funzioni derivabili due volte in un intervallo I.
B) Enunciare il "Teorema di Rolle" e darne una dimostrazione.

Definizione 1. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di I. Diciamo che f è derivabile in x_0 se il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

esiste ed è finito.
In questo caso, il limite (1) si chiama derivata di f in x_0 e si indica con il simbolo $f'(x_0$.

Definizione 2. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Diciamo che f è convessa quando per ogni $x, y \in I$ verificanti $x < y$ e per ogni $t \in (0, 1)$ si ha*

$$f(x + t(x - y)) \leq f(x) + t(f(x) - f(y)).$$

Proposizione 1. *Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo I. Allora f è convessa se e solo se f'' è non negativa.*

Teorema di Rolle 2. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni seguenti: f è derivabile in (a, b); f è continua nei punti a e b; $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Se f è costante, la tesi è ovvia.
Supponiamo dunque f non costante. Dalle ipotesi, segue l'applicabilità del *Teorema di Weierstrass*, che fornisce un punto di minimo x_1 e un punto di massimo x_2 in $[a, b]$.
Se x_1 è interno all'intervallo, scegliamo $\xi = x_1$ ed abbiamo la tesi([2]). In caso contrario prendiamo $\xi = x_2$ ed abbiamo la tesi, osservando che: se anche x_2 fosse un estremo, avremmo dalle ipotesi $f(x_1) = f(x_2)$, cioè $\min f = \max f$, e f sarebbe costante.

---

[2] Ricordiamo che, data f derivabile in un intervallo I, se x_0 è un estremo relativo per f ed è un punto interno ad I, allora x_0 è un punto stazionario per f.