CAM - Complementi di Analisi Uno, a.a. 2003/04

Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esame - 13 luglio 2004 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Calcolare il seguente limite utilizzando lo sviluppo di Taylor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}.$$

Soluzione. -4.

Si ha:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3); \\ \sin 3x &= 3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 - 3(x - \frac{1}{3!}x^3) + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{-9}{2} + \frac{1}{2})x^3 + o(x^3)}{x^3} = -4 + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = -4. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Sia data la funzione $f(x) := e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

Determinarne insieme di definizione, parità e disparità, segno, limiti ed asintoti, intervalli di monotonia, estremi relativi ed assoluti. Infine, disegnarne un grafico approssimativo.

Soluzione.

Per la presenza di x al denominatore della potenza di e, la funzione non è definita per $x = 0$; inoltre la radice quadrata esclude $x \in \mathbb{R}$ tali che $x(x+2) < 0$; segue: $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$.

Osserviamo che la funzione è positiva in tutto il suo dominio di definizione e non è né pari né dispari.

Poiché $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)} = +\infty$, la funzione presenta l'asintoto verticale $\{x = 0\}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)} = +\infty.$$

Inoltre,
$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}x = 1 \ \text{ e } \ \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)} - x = 2;$$
quindi, la funzione presenta l'asintoto obliquo: $\{y = x+2\}$.

La funzione è derivabile nel suo dominio e vale:
$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}}(x^2-2)}{x\sqrt{x(x-2)}}.$$

$f'(x) = 0$ se $x = \sqrt{2}$, punto di minimo, in quanto f decresce a sinistra di $\sqrt{2}$ e cresce a destra.

Inoltre, la funzione chiaramente ha un altro punto di minimo per $x = -2$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

A) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)^3}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; **B)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Soluzioni. $\dfrac{x}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2-x^2}} + cost.$; $\ln|\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}| + cost.$

(A) Effettuiamo la seguente sostituzione: $x = \alpha\sin t$. Allora $dx = \alpha\cos(t)dt$ e si ha:
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)^3}} &= \int \frac{\alpha\cos(t)dt}{\sqrt{(\alpha^2-\alpha^2\sin^2(t))^3}} \\
&= \int \frac{\alpha\cos(t)dt}{\alpha^3\cos^3(t)} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dt}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)} + cost. \\
&= \frac{x}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2-x^2}} + cost..
\end{aligned}$$

[[1]]

(B) Siccome $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$, poniamo:
$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t,$$

da cui
$$(x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2,$$
$$x = \frac{1+4t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$

[1] $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|$; per fissare le idee, ci soffermiamo su un solo caso, cioè $|\cos(t)| = \cos(t)$.

$$\sqrt{(\alpha^2 - x^2)^3} = \frac{5t}{1-t^2}.$$

Quindi, l'integrale iniziale diventa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t} dt &= \int \frac{2}{(1-t^2)} dt \\
&= \ln \left|\frac{1+t}{1-t}\right| + cost. \\
&= \ln \left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + cost.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Studiare l'integrabilità in $(1, +\infty)$ della seguente funzione: $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x^2-1|}\tanh^2(x)}{|x|^{\frac{5}{2}} \ln|x|}$.

Soluzione. La funzione è integrabile.

La funzione f presenta una singolarità nel punto $x = 1$, mentre è continua altrove (nell'intervallo in cui si chiede di studiarla). L'integrabilità della funzione è garantita dal *Criterio del confronto.*

Infatti, poiché si ha: $\ln(x) = x - 1 + o(x-1)$ per $x \to 1$, allora

$$f(x) \sim c|x-1|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{per} \quad x \to 1^+, \quad \text{con } c \text{ costante oppurtuna (neg)},$$

quindi la funzione è integrabile in $(1, 2]$.

Inoltre, la funzione è integrabile anche in $[2, +\infty)$. Si ha infatti:

$$f(x) \sim \frac{|x|^{-\frac{3}{2}}}{\ln(x)} \quad \text{pre} \quad x \to +\infty$$

e, confrontando con $|x|^{-\frac{3}{2}}$, si conclude il controllo dell'integrabilità di f.

ESERCIZIO 5

Dimostrare la validità della seguente disuguaglianza:

$$(1 - \sin x) < e^{-x} \quad \text{per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Sia $f(x) := e^x(1 - \sin x)$, allora la tesi equivale a dimostrare che $f(x) < 1$ per ogni x nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Osserviamo che $f(0) = 1$. Dimostriamo che la funzione f è decrescente nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Si ha:

$$f'(x) = e^x(1 - \sin x - \cos x)$$

Poiché

$$\sqrt{2} \equiv \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \geq \sin x + \cos x > 1,$$

allora

$$1 - \sqrt{2} \leq (1 - \sin x - \cos x) < 0.$$

In particolare

$$e^x(1 - \sin x - \cos x) < 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

da cui la monotonia voluta per f.