CAM - Complementi di Analisi Uno, a.a. 2003/04

Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esame - 8 giugno 2004 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la seguente funzione è continua e per quali valori è derivabile

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2a}{x^2+1} & x > 1, \\ x + 3b - 1 & x \leq 1. \end{cases}$$

Soluzione. f è continua in $\mathbb{R}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a = 3b$; f è derivabile in $\mathbb{R}$ se $a = -1$, $b = -1/3$.

Studio della continuità di f in $x = 1$.
Si ha:

$$f(1) = 3b,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 3b - 1) = 3b,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2a}{x^2+1} = a.$$

Quindi, f è continua in $x = 1$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a = 3b$.

Studio della derivabilità di f in $x = 1$.
Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x + 3b - 1 - 3b}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)}{(x-1)} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{6b}{x^2+1} - 3b}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{6b - 3bx^2 - 3b}{x^2+1}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} -\frac{3b(x^2-1)}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{x \to 1^+} -\frac{3b(x+1)}{(x^2+1)} = -3b. \end{aligned}$$

Quindi, f è derivabile in $x = 1$ per $a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{cases} a = 3b, \\ -3b = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3}, \\ a = -1. \end{cases}$

ESERCIZIO 2

Sia data la funzione $f(x) := e^{x+|x^2-1|}$.

Determinarne insieme di definizione, parità e disparità, segno, limiti ed asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di convessità, estremi relativi ed assoluti, flessi. Infine, disegnarne un grafico approssimativo.

La funzione è definita su tutta la retta reale ed è sempre positiva.
Inoltre $f(x)$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Poiché
$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ 1-x^2, \text{ se } -1 < x < 1, \end{cases}$$
si ha:
$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2+x-1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ e^{-x^2+x+1}, \text{ se } -1 < x < 1. \end{cases}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2+x-1} = +\infty.$$
Non vi sono asintoti.
Studiamo la monotonia della funzione e cerchiamo eventuali punti estremali.
La funzione è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$; I punti $x=-1$ e $x=1$ sono punti angolosi. Si ha:
$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1)e^{x^2+x-1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ (-2x+1)e^{-x^2+x+1}, \text{ se } -1 < x < 1. \end{cases}$$
Da cui:
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2},$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).$$
Quindi il punto $x = \dfrac{1}{2}$ è un punto di massimo locale per f.

Studiamo la concavità della funzione.
Si ha:
$$f''(x) = \begin{cases} ((2x+1)^2+2)e^{x^2+x-1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \\ (4x^2-4x-1)e^{-x^2+x+1}, \text{ se } -1 < x < 1. \end{cases}$$
Da cui:
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1, \infty).$$
Quindi il punto $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di flesso per f.

ESERCIZIO 3
Calcolare (se esiste) il seguente integrale improprio.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

Soluzione. L'integrale esiste e vale $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

Con il cambio di variabile $x = t^2$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} &= \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \text{costante} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \text{costante}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1/2}}{1-\sqrt{1/2}}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

ESERCIZIO 4
Studiare l'integrabilità in $(2, +\infty)$ delle seguenti funzioni:

A) $f(x) = \dfrac{2 + \sin(\arctan x) - e^{-x}}{x^2}$; **B)** $f(x) = \dfrac{1}{x|\ln x|^\alpha}$ (al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$).

Soluzione. (A) La funzione è integrabile in $(2, +\infty)$; (B) La funzione è integrabile in $(2, +\infty)$ se $\alpha > 1$.

L'integrabilità della prima funzione segue per confronto asintotico con la funzione $1/x^2$; infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2+\sin(\arctan x)-e^{-x}}{x^2}}{1/x^2} = 2 + 1 = 3 > 0.$$

Per la seconda funzione, conviene studiare l'integrale improprio operando il cambio di variabile $x = e^t$. Si ha:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{L \to +\infty} \int_2^L \frac{1}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{L \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \text{ se } \alpha > 1.$$

ESERCIZIO 5

Dare un'approssimazione con un errore assoluto $\leq 10^{-3}$ del seguente integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

Soluzione. $\dfrac{78}{105} \pm 10^{-3}$.

Si ha $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k)!} + R(x)$, con $|R(x)| \leq \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)!}$.

Si può prendere l'integrale del polinomio se l'integrale del resto è $\leq 10^{-3}$. Ciò avviene se $n = 3$; infatti:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} dx = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} \leq 10^{-3} \text{ se } n \geq 3.$$

Quindi

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{78}{105}.$$