Matematica - Roma Tre
GE4 - Geometria Differenziale 1

Esercizi su Superfici Minime, Rigate e Isometrie - Alvin (18-12-09)

1. Non esistono superfici Minime compatte in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare o trovare un controesempio.

2. Mostrare che il Catenoide $X_1(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ e l'Elicoide $X_2(u,v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ sono superfici Minime, la prima è di rotazione e la seconda è rigata. Notare che l'Elicoide NON è una superficie di rotazione. Come sono fatte le curve d'intersezione con i piani orizzontali?

3. Verificare che l'Iperboloide a una falda $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ è una superficie rigata nella seguente maniera: considerare le seguenti coordinate locali su Σ:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & (-\pi,\pi)\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \Sigma \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v) \end{array}$$

se $\gamma(u) = \phi(u,0) = (\cos u, \sin u, 0)$ il cerchio unitario, per ogni $u = u_0$ fisato e al variare di $v \in \mathbb{R}$ la curva $\phi(u_0, v) \subset \Sigma$ è la retta che passa per il punto $\gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$ nella direzione del vettore $\dot\gamma(u_0) + \vec{k}$ è quindi tutta contenuta in Σ. Mostrare che inoltre Σ è doppiamente rigata perché contiene anche tutte le rette per $\gamma(u_0)$ nella direzione di $-\dot\gamma(u_0) + \vec{k}$. Infine usare questa proprietà geometrica per dimostrare che Σ ha Curvatura di Gauss strettamente negativa.

4. Sia $\mathcal{C}$ il cilindro $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Considerata l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C}\times\mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & (e^{iu}, v) \end{array}$$

mostrare che

(1.1) φ è un'isometria locale.
(1.2) φ non è un'isometria globale.
(1.3) Se $U := (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ allora $\varphi_{|U}$ è un'isometria globale sull'immagine.
(1.4) Non esiste una congruenza (cioè un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$) che manda $\mathcal{C}$ in U.

5. Considerato $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare è conforme se e solo se conserva gli angoli.

6. *Il gruppo* CO_2 delle trasformazioni lineari conformi del piano $\mathbb{R}^2$ è

$$CO_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid A^tA = \lambda Id., \text{ per qualche } \lambda \neq 0\}.$$

Mostrare che valgono le seguenti proprietà:

(a) CO_2 è un gruppo rispetto alla moltilicazione righe per colonne.
(b) CO_2 ha due componenti connesse.
(c) Una matrice A appartiene a CO_2 se e solo se ruota tutti i vettori di uno stesso angolo θ e li dilata o li contrae di uno stesso fattore $\lambda \neq 0$.
(d) Una matrice quadrata 2×2 commuta con la matrice $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $A \in CO_2$ e inoltre det $A > 0$.
Concludere che una tale matrice è della forma $\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.

7. (Do Carmo, pag. 230 es. 16) Siano $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ coordinate geografiche sulla sfera unitaria, con $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \theta < \pi,\, 0 < \varphi < 2\pi\}$ e $X(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta)$.

   Operando poi il seguente cambio di coordinate:

$$\log\tan\frac{\theta}{2} = u, \qquad \varphi = v.$$

   otteniamo una nuova parametrizzzazione di $X(U) = V$ data da

$$Y(u, v) = (\cosh^{-1}\, u\cos v,\, \cosh^{-1}\, u\sin v,\, \tanh\, u).$$

   Calcolare la prima forma fondamentale in queste nuove coordinate. Osservare quindi che Y^{-1} è un'applicazione conforme che manda meridiani e paralleli di S^2 in rette del piano, detta "Proiezione di Mercatore". Per l'esercizio 5 conserva gli angoli (ma NON le distanze, dimostrare!) e quindi può essere usata per tracciare le rotte degli aerei o delle navi.

8. Sappiamo (cfr. Do Carmo pag 237, es 1) che se X è una carta locale tale che la sua prima forma fondamentale è diagonale, allora si ha

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

   (i) Mostrare che non esistono superfici $X(u, v)$ tali che $E = G = 1$, $F = 0$ e $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

   (ii) Esiste una superficie $X(u, v)$ con $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$ e $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?

9. Sia $\gamma(v) = (\varphi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}}dt), v \geq 0$ la curva cosiddetta "*trattrice*". La superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice, posta nel piano xz, attorno all'asse z è detta "*pseudosfera*". Utilizzando la formula che da la curvatura di Gauss per superfici di rotazione (Do Carmo p. 162), verificare che la pseudosfera ha curvatura di Gauss costante negativa: $K = -1$.