Matematica - Roma Tre
GE4 - Geometria Differenziale 1

Esercizi su Curvatura delle Superfici - Alvin (01-12-09)

1. Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un endomorfismo lineare.

2. Calcolare l'operatore forma e discutere la natura dei punti delle seguenti superfici regolari.
(2.1) La sfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
(2.2) L'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
(2.3) Il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
(2.4) La sella $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
(2.5) L'iperboloide a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
(2.6) Il toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$
(2.7) Mostrare inoltre che tutti i punti delle *quadriche* (2.1)-(2.5) sono dello stesso tipo mentre la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili.

3. Nel semipiano $\{(0, y, z) : y > 0\}$ sia data la curva regolare

$$\gamma(v) = (y(v), v)$$

Utilizzando le formule a pagina 161 (esempio 4) del Do Carmo, discutere il segno della curvatura di Gauss della superficie Σ ottenuta facendo ruotare la curva γ intorno all'asse z. Dare un'interpretazione geometrica del segno della curvatura di Gauss in relazione con la derivata seconda di $y(v)$.

4. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ dove e_1, $e_2 \in T_p\Sigma$ sono le direzioni principali nel punto p.
Calcolare gli zeri della seconda forma quadratica:

$$\begin{array}{rccl} f: & [0, \pi) & \longrightarrow & [-k_2, -k_1] \\ & \theta & \longmapsto & -k_1 \cos^2\theta - k_2 \sin^2\theta \end{array}$$

che dà la curvatura normale per ogni vettore $v \in T_p\Sigma$. Gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche.* Dimostrare inoltre che si hanno:

(a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.

(b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico

(c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico

(d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

5. Determinare i punti critici della funzione "altezza dal piano orizzontale $\{z = 0\}$" sulle seguenti superfici e discuterne la natura (trovare cioè l'Hessiano)

   (a) La "Sella di scimmia" data dalla carta locale

$$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, u^3 - 3v^2u) \end{array}$$

   (b) La "Sella" data dalla carta locale

$$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, uv) \end{array}$$

   (c) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, v^4 - v^2(e^{2u} + e^{-2u})) \end{array}$$

   (d) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\mathbf{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u, v, v^4 - 4v^2 + 4u^2 - u^4) \end{array}$$

   (e) Il toro di rotazione $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1,\ z \geq 0\}$

6. Abbiamo visto a lezione che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \|\cdot\|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull'iperboloide a una falda

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

   δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto?

7. Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \|\cdot\|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno completamente arbitrario, cioè positivo, negativo o nullo.