Matematica - Roma Tre
GE4 - Geometria Differenziale 1
Esercizi su Applicazioni liscie e Orientazione - Alvin (23-10-09)

1. (Do Carmo, p. 80 es 7; p. 109 es 1,2,3,4,5,7)

2. Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e sia $A : S^2 \longrightarrow S^2$ l'applicazione antipodale, ovvero $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Mostrare che A è un diffeomorfismo.

3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni $p \in S$ la sua proiezione ortogonale sul piano orizzontale $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.
   Stabilire se π è differenziabile (= liscia). Per quali punti il differenziale $d\pi_p$ è un'isomorfismo lineare?

4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $d(p) = |p - p_0|$, dove $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non in S. Mostrare che d è differenziabile.

5. Mostrare che il catenoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo.

6. Dimostrare che, date due superfici regolari S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, un'applicazione $f : S_1 \longrightarrow S_2$ è un diffeomorfismo se e solo se f è liscia, biiettiva, e il suo differenziale df_p è un'applicazione lineare invertibile $\forall p \in S_1$

7. Ricordiamo che data una funzione liscia su una superficie $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ e $p \in \Sigma$, la derivata $df_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ è definita come
   $$df_p(\dot\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))_{t=0}$$
   per ogni curva liscia $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$. Dimostrare che f è una funzione costante se e solo se $df_p = 0$ per ogni p.

8. L'immagine dell'applicazione
   $$\mathbf{x} : \begin{array}{ccc} \rho^2 & \longrightarrow & \rho^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u\cos v, u\sin v, v) \end{array}$$
   è una superficie regolare detta Elicoide.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{x}$ è una carta locale e determinare $T_p\Sigma$ al variare di p.
   (b) Notare che la proiezione ortogonale $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ sul piano orizzontale non è iniettiva e quindi π non è un diffeomorfismo.
   (c) Per quali punti $p \in \Sigma$ la proiezione ortogonale π è un diffeomorfismo locale? [*Suggerimento.* π è un diffeomorfismo locale in p, se e solo se la sua derivata $d\pi$ in p è un isomorfismo lineare, se e solo se $T_p\Sigma$ non contiene il vettore verticale $k = (0, 0, 1)$.]