

Matematica - Roma Tre
GE420 - Geometria Differenziale 1

ESERCIZI SU HESSIANO E CURVATURA - ALVIN (7 DICEMBRE 2010)

1. Determinare i punti critici della funzione “altezza dal piano orizzontale $\{z = 0\}$ ” sulle seguenti superfici e discuterne la natura (trovare cioè l’Hessiano)

(a) La “Sella di scimmia” data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, u^3 - 3v^2u) \end{aligned}$$

(b) La “Sella” data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, uv) \end{aligned}$$

(c) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, v^4 - v^2(e^{2u} + e^{-2u})) \end{aligned}$$

(d) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, v^4 - 4v^2 + 4u^2 - u^4) \end{aligned}$$

(e) Il toro di rotazione $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1, z \geq 0\}$

2. Abbiamo visto a lezione che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \|\cdot\|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull’iperboloide a una falda

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto?

3. Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \|\cdot\|^2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno completamente arbitrario, cioè positivo, negativo o nullo.