Matematica - Roma Tre
GE420 - Geometria Differenziale 1
CURVATURA DELLE SUPERFICI - ALVIN (02-12-10)

1. Dimostrare che sono ben definiti la traccia e il determinante di un endomorfismo lineare.

2. Cercare sul libro di testo una parametrizzazione - coordinate locali - per ciascuna delle seguenti superfici regolari e calcolarne la curvatura
$$dN = -II \cdot I^{-1}$$
trovare cioè la matrice 2×2 che rappresenta la curvatura rispetto alla base del piano tangente in quelle coordinate. Ricordiamo che un punto $p \in \Sigma$ si dice ellittico se la curvatura di Gauss di Σ è positiva in p, etc. etc.
(2.1) La sfera di raggio R $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
(2.2) L'iperboloide a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
(2.3) Il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
(2.4) La sella $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
(2.5) L'iperboloide a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
(2.6) Il toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$
(2.7) Mostrare inoltre che: tutti i punti della sfera sono ombellicali, tutti i punti delle *quadriche* (2.1)-(2.5) sono dello stesso tipo, mentre invece la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili.

3. Nel semipiano $\{(0, y, z) : y > 0\}$ sia data la curva regolare
$$\gamma(v) = (y(v), v)$$
Utilizzando le formule a pagina 161 (esempio 4) del Do Carmo, discutere il segno della curvatura di Gauss della superficie Σ ottenuta facendo ruotare la curva γ intorno all'asse z. Dare un'interpretazione geometrica del segno della curvatura di Gauss in relazione al segno della derivata seconda di $y(v)$.

4. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ dove e_1, e_2 sono base ortonormale di $\in T_p\Sigma$ e direzioni principali nel punto p, cioè autovettori dell'operatore dN che ha sempre due autovalori reali $k_1 \leq k_2$. Per il teorema di Meusnier la curvatura normale k_n di una curva $\gamma \subset \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = v$ dipende solo dalla direzione di $\dot\gamma$ cioè $k_n(\theta) = k_n(-\theta)$. Abbiamo visto che la seconda forma fondamentale calcola tutte le curvature normali e che ponendo $f(\theta) := k_n(\theta)$ otteniamo la seguente funzione di una variabile di periodo π:
$$\begin{array}{rccc} f: & [0, \pi) & \longrightarrow & [-k_2, -k_1] \\ & \theta & \longmapsto & -k_1\cos^2\theta - k_2\sin^2\theta \end{array}$$
I punti di max e min sono detti direzioni principali mentre gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche*. Dopo aver tracciato un grafico qualitativo della funzione $f(\theta)$, dimostrare che si hanno:
   (a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
   (b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
   (c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
   (d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare