Matematica - Roma Tre
GE4 - Geometria Differenziale 1

12 Novembre 2010 - Applicazione di Gauss, Metrica Riemanniana indotta (I forma fondamentale) e Curvatura (II forma fondamentale) di una superficie in $\mathbb{R}^3$

Studiare sul Do Carmo la sezione 2-5 fino a p.96; la sezione 2-6; il capitolo 3 fino a pagina 140, Prop.1 esclusa.

1. Do Carmo, p.99, es. 1.
2. Do Carmo, p.109, es 2,5,7.
3. Do Carmo, p.151, es. 8.

4. Dimostrare che l'applicazione antipodale
$$A: \begin{array}{ccc} S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ p & \longmapsto & -p \end{array}$$
è un diffeomorfismo della sfera standard S^2. Mostrare che A cambia l'orientazione di S^2.
5. (Dal compito in classe Novembre 2009).
   (a) Mostrare che per ogni punto q della sfera standard $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ il vettore Oq è perpendicolare al piano tangente T_qS^2. Concludere che l'identità è un'applicazione di Gauss di S^2, in particolare N è suriettiva in questo caso.
   (b) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una qualsiasi superficie orientabile, cioè esiste un'applicazione di Gauss $N : \Sigma \to S^2$. Mostrare che per ogni punto $p \in \Sigma$ il piano tangente $T_p\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ coincide con il piano tangente $T_{N(p)}S^2 \subset \mathbb{R}^3$, cioè la derivata di N soddisfa $dN_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$.
   (c) Mostrare che ogni superficie di tipo grafico Σ è orientabile e quindi esiste un'applicazione di Gauss $N : \Sigma \to S^2$. N può essere suriettiva in questo caso?