Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
GE03-Topologia generale e topologia algebrica
Prof. M. Pontecorvo
Complessi Simpliciali e Classificazione delle Supperfici Topologiche Compatte

Esercizio 1.
a) Sia $f_0 : K^{(0)} \longrightarrow L^{(0)}$ una mappa che manda i vertici di un simplesso di K in vertici di un simplesso di L. Si dimostri che esiste ed è unica la mappa sempliciale che ristretta ai vertici agisce come f_0.
b) Se nelle notazioni precedenti f_0 è biunivoca e $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sono vertici di un simplesso di K se e solo se $\{f(v_1), \ldots, f(v_k)\}$ sono vertici di un simplesso di L, allora $|K|$ e $|L|$ sono omeomorfi con omeomorfismo dato da una mappa simpliciale.

Esercizio 2. (Problema 5-1)
Sia X uno spazio topologico e siano $Y_1, \ldots, Y_k$ dei suoi sottospazi chiusi la cui unione sia tutto X. Dimostrare che la topologia di X è coerente con quella dei sottospazi.

Esercizio 3.
Sia dato v un vertice di un complesso simpliciale K. La stella aperta di v, $\mathrm{St}(v)$, è l'unione di tutti gli interni dei simplessi di cui v è un vertice. Dimostrare che è un intorno del punto v è che la famiglia delle stelle di v, al variare di v in tutti i vertici del complesso K è un ricopirmento aperto di K.

Esercizio 4.
Dimostrare che ogni poliedro è di Hausdorff e localmente connesso per archi.

Esercizio 5.
Sia K un complesso simpliciale, si dimostri che è compaatto se e solo se è finito.

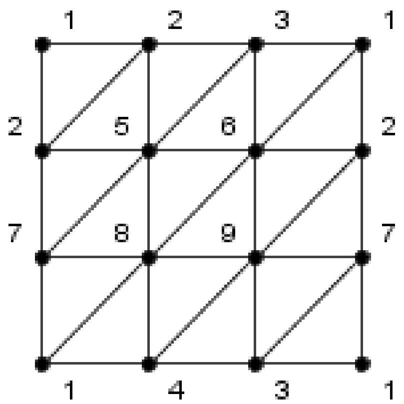
Esercizio 6. (Problema 6-1)
Si dimostri che la stringa $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}$ rappresenta un toro in due modi diversi:

1. Usando l'algoritmo per ridurre un poligono in forma canonica.

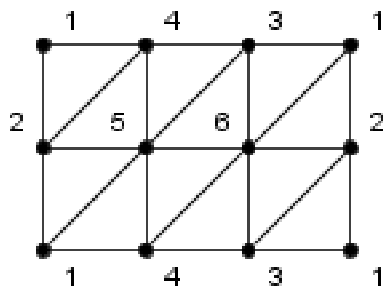
2. Dimostrando che è una superficie orientabile, trovandone una triangolazione e calcolandone la caratteristica di Eulero.

Che cos'è $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}$?
Eventualmente svolgere lo stesso esercizio con le restanti superfici proposte nel problema 6-1 del Lee.

Esercizio 7.
a) Si dimostri che la segunte è una triangolazione del toro e calcolare quindi la caratteristica di Eulero del toro.



b) Si veda poi che lo spazio quoziente del seguente è un toro. E' una triangolazione?



c) Trovare una triangolazione della bottiglia di Klein e calcolarne la caratteristica di Eulero.

Esercizio8.
Dimostrare che per una qualsiasi triangolazione di uno spazio di dimensione 2, S, se si denotano con t, l, e v il numero dei triangoli, dei lati e dei vertici rispettivamente, allora valgono le seguenti

- Se S è una superficie topologica compatta allora $3t = 2l$
- $2l \leq v(v-1)$