# Matematica - Roma Tre
# GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

COMPITO A CASA - GENNAIO 2014

1. Mostrare che la curvatura di Gauss è ben definita anche su una superficie non-orientabile. Calcolare la curvatura di Gauss del Nastro di Möbius. Ci sono punti parabolici? (Sugg.: Usare Mathematica).

2. Abbiamo visto a lezione che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \| \cdot \|^2$ allora $p$ è ellittico. Considerare la funzione $\delta$ sull'iperboloide a una falda
$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$
$\delta$ ammette un massimo assoluto? $\delta$ ammette un massimo relativo? $\delta$ ammette un minimo assoluto?

3. Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \| \cdot \|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno completamente arbitrario, cioè positivo, negativo o nullo.

4. Sia $\mathcal{C}$ il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Considerata l'applicazione
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & (e^{iu}, v) \end{array}$$
mostrare che
(1.1) $\Phi$ è un'isometria locale tra il piano e il cilindro che non è un'isometria globale.
(1.2) Trovare un aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che la restrizione $\Phi_{|U}$ sia un'isometria globale sull'immagine e determinare l'immagine.
(1.3) Non esiste una congruenza (cioè un movimento rigido di $\mathbb{R}^3$) che manda un aperto del cilindro $\mathcal{C}$ in un aperto del piano.

5. Considerato $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare è conforme se e solo se conserva gli angoli.

6. *Il gruppo* $CO_2$ delle trasformazioni lineari conformi del piano $\mathbb{R}^2$ è
$$CO_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid A^t A = \lambda Id.,\ \text{per qualche } \lambda \neq 0\}.$$
Mostrare che valgono le seguenti proprietà:
   (a) $CO_2$ è un gruppo rispetto alla moltilicazione righe per colonne.
   (b) $CO_2$ ha due componenti connesse.
   (c) Una matrice $A$ appartiene a $CO_2$ se e solo se ruota tutti i vettori di uno stesso angolo $\theta$ e li dilata o li contrae di uno stesso fattore $\lambda \neq 0$.
   (d) Una matrice quadrata $2 \times 2$ commuta con la matrice $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $A \in CO_2$ e inoltre $\det\ A > 0$.
   Concludere che una tale matrice è della forma $\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.

7. Sia $\gamma(v) = (\varphi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}} dt), v \geq 0$ la curva cosiddetta "*trattrice*". La superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice, posta nel piano $xz$, attorno all'asse $z$ è detta "*pseudosfera*". Dopo averne calcolato la curvatura di Gauss, usando per esempio la formula sul Do Carmo a p. 162, giustificare il nome *pseudosfera*. Esiste un'isometria locale tra un'aperto della pseudosfera e un aperto del toro dell'ultimo foglio di esercizi per casa?