Matematica - Roma Tre
GE310 - Istituzioni di Geometria Superiore - Prof. M.Pontecorvo

11 dicembre 2013

1. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario. Possiamo scrivere $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ con e_1, e_2 base ortonormale di $\in T_p\Sigma$ nonché direzioni principali nel punto p. Per il Teorema Spettrale infatti l'operatore autoaggiunto dN ha sempre due autovalori reali $k_1 \leq k_2$ con autovettori e_1, e_2.

   Per il Teorema di Meusnier la curvatura normale k_n di una curva $\gamma \subset \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = v$ dipende solo dalla direzione di $\dot\gamma$ cioè $k_n = k_n(\theta) = k_n(-\theta)$. Abbiamo visto che la seconda forma fondamentale calcola tutte le curvature normali e che ponendo $f(\theta) := k_n(\theta)$ otteniamo la seguente funzione di una variabile, periodica di periodo π:

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,\pi) & \longrightarrow & [k_1, k_2] \\ & \theta & \longmapsto & k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \end{array}$$

   I punti di max e min sono detti direzioni principali mentre gli zeri di f (cioè le direzioni in cui la curvatura normale si annulla) sono detti *direzioni asintotiche*. Dopo aver tracciato un grafico qualitativo della funzione $f(\theta)$, dimostrare che nel punto $p \in \Sigma$ si hanno:

   (a) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico

   (b) Esattamente una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico

   (c) Esattamente due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico

   (d) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

2. Cercare sul libro di testo una parametrizzazione - coordinate locali - per ciascuna delle seguenti superfici regolari e calcolarne la curvatura

$$dN = -II \cdot I^{-1}$$

   trovare cioè la matrice 2×2 che rappresenta la curvatura rispetto alla base del piano tangente in quelle coordinate. Per ciascuna superficie, descrivere l'immagine della carta locale, e quindi il (sotto)insieme su cui è stata calcolata la cuvatura. Ricordiamo che un punto $p \in \Sigma$ si dice ellittico se la curvatura di Gauss di Σ è positiva in p, etc. etc.
   (2.1) La sfera di raggio R $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$
   (2.2) L'iperboloide a una falda $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ detto anche iperboliode iperbolico, perché?
   (2.3) Il paraboloide di rotazione $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$ detto anche paraboloide ellittico, perché?
   (2.4) La sella $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ detto anche paraboloide iperbolico, perché?
   (2.5) L'iperboloide a due falde $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ detto anche iperboloide ellittico, perché?
   (2.6) Il toro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 = 1\}$
   (2.7) Mostrare inoltre che: tutti i punti della sfera sono ombellicali, tutti i punti delle *quadriche* (2.1)-(2.5) sono dello stesso tipo, mentre invece la curvatura di Gauss del toro assume tutti i segni possibili. Cercare di spiegare il fenomeno geometricamente e/o analiticamente.
   (2.8) Quali di queste superfici sono di rotazione?