# ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE

**Esercizio 1**
Calcolare i seguenti limiti facendo uso, se occorre, dei limti notevoli:

$(i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right)$

$(ii)\ \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{1+a^n},\ a\geq 1$

$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$

$(iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$

$(v)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

$(vi)\ \lim_{n\to\infty}\arctan(n^2-1)\frac{\cos 2n\pi}{n\pi}$

$(vii)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\ln n}$

$(viii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2+n^2}{n^3}\cot\frac{1}{n}$

$(ix)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}$

$(x)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}$

$(xi)\ \lim_{n\to\infty}n^2\frac{2^n}{3^n}$

$(xii)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sin n}{n^2+n}$

$(xiii)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^n,\ a\in\mathbf{R}^+$

$(xiv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2\sin\frac{1}{n}}{n^2+1}$

$(xv)$ $\lim_{n\to\infty}(\cos\pi x)^{2n}$ determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione converge.

$(xvi)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin\frac{1}{n}(\ln n)^2}{(n+1)^2}$

$(xvii)$ $\lim_{n\to\infty} n\left[(n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right]$

$(xviii)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

$(xix)$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$

$(xx)$ $\lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

$(xxi)$ $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

$(xxii)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4}$

**Esercizio 2**

Usando la definizione di limite dimostrare che:

$(a)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-8n+4}{n-4} = +\infty$

$(b)$ $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$

$(c)$ $\lim_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e$

**Esercizio 3**

Dire per quali valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ la seguente successione ammette limite finito o infinito:

$$x_n = a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n^2}}.$$

**Esercizio 4**

Teoremi di Cesaro:

*Teorema 1*: Se la successione di termine generale $a_n$ ha per limite $l$, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = l$.

*Teorema 2*: Se $a_n > 0$ é tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n\to\infty}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

*Teorema 3*: Se $a_n$ é tale che $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l$.

*Teorema 4*: Se $a_n > 0$ é tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Utilizzando i teoremi di Cesaro calcolare i seguenti limiti:

$(a)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$

$(b)$ $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{2n}}}{n}$

**Esercizio 5**

Verificare che una successione $a_n$ converge ad un numero $l$ se e soltanto se entrambe le sottosuccessioni $a_{2n}$ e $a_{2n-1}$ convergono allo stesso limite $l$.

**Esercizio 6**

Supponiamo che le sottosuccessioni $a_{2n}$ e $a_{2n-1}$ estratte da una successione $a_n$ siano entrambre monotone. Dimostrare che , se $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$, allora $a_n$ ammette limite.

**Esercizio 7**

Verificare con un esempio che l'enunciato dell'esercizio precedente non é invertibile, ovvero esistono successioni $a_n$ che ammettono limite, tali che $a_{2n}$ e $a_{2n-1}$ sono monotone ma $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) \neq 0$.