Soluzioni II tutorato AM01a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

7 ottobre 2004

Esercizio 1. Dimostrare che:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

- Questa è l'impostazione per la risoluzione più rapida che evita di affrontare il problema caso per caso:

$||a|-|b|| \leq |a-b| \Leftrightarrow ||a|-|b||^2 \leq |a-b|^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2|ab| \leq a^2+b^2-2ab \Leftrightarrow |ab| \geq ab$

Esercizio 2. Dimostrare che, se a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, risulta:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

b) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$

c) $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

- Per la risoluzione di questi esercizi utilizzate la formula: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Esercizio 3. Dire per quali $x \in R$ sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

1. con i moduli

   (a) $|x^2 - 3x + 2| < x + 1$

   - PASSO 1: in quali intervalli la funzione $\alpha = x^2 - 3x + 2$ assume valori positivi ($\alpha \geq 0$)? Negli intervalli $x \leq 1$ e $x \geq 2$

   -PASSO 2: studio la disequazione imponendo $\alpha \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 < x + 1$ che è verificata in $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$. Ricordandoci gli intervalli su cui stiamo lavorando ($x \leq 1$ e $x \geq 2$) basterà fare l'intersezione! Se $\alpha \geq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} < x \leq 1 \vee 2 \leq x < 2 + \sqrt{3}$

   -PASSO 3: ora considero $\alpha < 0$... Trovo che la disequazione è verificata $\forall x \in [1, 2]$

   -PASSO 4: faccio l'UNIONE dell soluzioni PER OGNI intervallo, ottenendo in questo caso: $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$

(b) $\left|\frac{|x+1|+3}{|2x|+1}\right| \leq 4$
-Fate attenzione... la funzione all'interno del modulo è OVVIAMENTE sempre positiva.

(c) $|2\tan^2 x - \tan x| < 2$
-Sostituite $\tan x$ con y e risolvete come una disequazione di secondo grado. Ricordatevi di esplicitare la x!!!!

(d) $|\sqrt{3}\sin x - \cos x| \leq 1$
-Da utilizzare anche nel punto c) del prossimo esercizio: chiamate $\sin x = Y$ e $\cos x = X$, poi ricordatevi della relazione fondamentale della trigonometria $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ora potete fare una discussione grafica con la retta e la circonferenza...

2. trigonometriche

(a) $\frac{\sin x - \cos x}{4\sin x + 9} \geq 0$
-Il denominatore è sempre maggiore di zero... a questo punto potete discutere facilmente la disequazione con la circonferenza goniometrica!

(b) $\cos(2x) + \cos(x) < 0$
-suggerimento: utilizzate la formula $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, poi chiamate $\cos x = y$ e risolvete come una disequazione di secondo grado. Ricordatevi poi alla fine di controllare le condizioni sul coseno di x e non fermatevi ad y...

(c) $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 1 < 0$

(d) $(4 - \sqrt{6})\sin^2 x - \sqrt{6}\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x > 2\sqrt{2}\sin x$
-suggerimento: trasformate $\cos^2 x = 1 - \sin_2 x$.

(e) $4\sin x \tan x - \frac{3}{\cos x} < 0$
Ricordatevi di studiare il segno di $\cos x$ quando mettete a fattor comune... non lo potete semplicemete semplificare imponendo che sia diverso da zero.

3. esponenziali

(a) $3^x - 5 \cdot 3^{1-x} \leq 2$
-Strategia: imponete $3^x = t$.

(b) $3^{x-1} > \frac{4^{x+1}}{5}$
-Sol: $x < \log_{\frac{3}{4}} \frac{12}{5}$

4. logaritmiche

(a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)>0$
   -Ricordate SEMPRE di imporre le condizioni di esistenza del logaritmo!!! sol: $x<-\sqrt{2}\vee x>\sqrt{2}$

(b) $\log x+\log(x+3)<1$

(c) $2\log_{0,7}(x+1)-\log_{0,7}(x-1)>\log_{0,7}(3x-1)$
   -Fate attenzione... la base del logaritmo è minore di 1!

(d) $\log_{\frac{1}{2}}(7-2^x)-\log_{\frac{1}{2}}(5+4^x)+\log_{\frac{1}{2}}7\geq 0$

5. ...per concludere

   (a) $|\cos x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ sol: $x\in(\pi/4,3\pi/4)\cup(5\pi/4,7\pi/4)$

   (b) $|\log_9(2x^2-x+1)-\log_3(x-2)|\leq 1$

   (c) $\log_2(2\sin^2 x-\sin x+3)>2$

   (d) $2\log_{\frac{1}{2}}\tan x\leq\log_{\frac{1}{2}}3$

Esercizio 4. Dimostrare che $\sqrt{3}$ non è un numero razionale.

-Similmente alla dimostrazione fatta in aula per $\sqrt{2}$:

sia per assurdo $\sqrt{3}$ un numero razionale. Allora lo possiamo scrivere come rapporto tra due numeri interi positivi coprimi, n ed m: MCD(n,m)=1!! $\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{n}{m}\Rightarrow 3=\frac{n^2}{m^2}\Rightarrow 3m^2=n^2\Rightarrow 3|n^2\Rightarrow 3|n\Rightarrow n=3k$. Sostituendo nell'uguaglianza al terzo passaggio avremo $3m^2=9k^2\Rightarrow m^2=3k^2\Rightarrow 3|m$. Abbiamo così che MCD(m, n)=3, negando l'ipotesi iniziale e ottenendo ubn ASSURDO!!