Esame scritto di Am1a- soluzioni
17 gennaio 2005

Esercizio 1.
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \{x = \frac{n\sqrt{3}}{1+n},\ n \in \mathbf{N}\}$$

Includendo lo zero nei naturali il minimo é zero, se decidiamo di partire da 1, allora il minimo sará $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dimostriamo una delle due affermazioni, ad esempio che 0 é minimo: dato che appartiene all'insieme, dobbiamo solo provare che é un minorante:

$$\frac{n\sqrt{3}}{1+n} \geq 0$$

é sempre vero poiché $n \geq 0$. Osserviamo che la frazione $\frac{n}{1+n}$ é sempre minore di 1, e tende a 1, quindi proviamo che $\sqrt{3}$ é l'estremo superiore: é un maggiorante, infatti

$$\frac{n\sqrt{3}}{1+n} < 1 \cdot \sqrt{3}.$$

E' il piú piccolo dei maggioranti, infatti

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : \sqrt{3} - \varepsilon < \frac{\overline{n}\sqrt{3}}{1+\overline{n}} \Leftrightarrow \overline{n} > \frac{\sqrt{3}-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Esercizio 2.
Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Per $n = 1$ si ha $\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, quindi la base dell'induzione é verificata. Supponiamo l'asserto vero per n e proviamolo per $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

qui si applica l'ipotesi induttiva

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

cioé la tesi.

Esercizio 3.

Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione:

$$a_n = \left[\sin^2\left(\frac{n\pi}{16}\right) - 1\right]^n$$

Se $\left|\sin^2\left(\frac{n\pi}{16}\right) - 1\right| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sin^2\left(\frac{n\pi}{16}\right) - 1\right]^n = 0$$

quindi 0 é limite di almeno una sottosuccessione ,ad esempio per $n = 4 + 32k$ $\sin^2\left(\frac{n\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}$. Resta da provare é che qualsiasi numero piú piccolo di 0 é un minorante definitivo, ovvero che $\forall \varepsilon > 0$ $a_n > 0-\varepsilon$. Si deve osservare che , su tutte le sottosuccessioni n_k che rendono la quantitá tra parentesi strettamente minore di 1, (chiamiamo la quantitá tra parentesi b_{n_k}) si ha

$$(b_{n_k})^n \geq -(b_{n_k})^n > -\varepsilon$$

dato che $b_{n_k} \to 0$. Riguardo al massimo limite, osserviamo che per $n_1 = 16k$, il seno é identicamente nullo, quindi $a_{n_1} \to 1$. Inoltre $a_n \leq 1$, quindi 1 é massimo limite.

Esercizio 4.
Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^x - 3)^n$$

E' una serie geometrica, converge per $|2^x - 3| < 1$, ovvero $-1 < 2^x - 3 < 1 \iff x \in (1, 2)$. Per $x = 1, x = 2$ la serie diverge.

Esercizio 5.
Stabilire per quali valori del parametro reale a la seguente successione ammette limite finito:

$$x_n = \frac{n(-1)^n}{n^a \sin \frac{1}{n^3}}$$

$$\frac{n(-1)^n}{n^a \sin \frac{1}{n^3}} = \frac{n(-1)^n}{n^{a-3}} \cdot \frac{1}{n^3 \sin \frac{1}{n^3}}$$

passando a limite, ricordando il limite notevole $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$, si ottiene un limite finito se $a - 3 > 1$, ovvero $a > 4$.