2. SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SUI PUNTI DI ACCUMULAZIONE E TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE

Esercizio 1
$(A) := \{x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
Intuitivamente se n diventa molto grande gli elementi dell' insieme si addensano vicino a 0, e sono del resto sempre positivi, quindi un candidato ad essere punto di accumulazione é proprio 0. Dobbiamo dimostare che $\forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A \setminus \{0\}$ tale che $x \in I(0, \varepsilon)$. Un elemento dell'insieme, quindi della forma $x = \frac{1}{n}$ appartiene a tale intorno se

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Quindi tutti i numeri del tipo $\frac{1}{n}$ con $n > \frac{1}{\varepsilon}$ cadono nell'intorno di centro 0 e raggio ε, e 0 é di accumulazione per l'insieme A.
Tutti gli altri punti sono chiaramente isolati: scegliamo un generico elemento dell'insieme, detto $\overline{x} = \frac{1}{\overline{n}}$. Scegliendo $r < min\left\{\left|\frac{1}{\overline{n}} - \frac{1}{\overline{n}-1}\right|, \left|\frac{1}{\overline{n}} - \frac{1}{\overline{n}+1}\right|\right\}$, si avrá che in $I(\frac{1}{\overline{n}}, r)$ non cadono altri punti di A eccetto $\frac{1}{\overline{n}}$.

$(B) := \{x = \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$
Dando ad n valori sempre piú grandi osserviamo che i punti dell' insieme si vanno ad addensare intorno a 0 e 3. Verifichiamo che 0 e 3 sono effettivamente di accumulazione :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{ se scegliamo } n > \frac{1}{\varepsilon},\ \exists x \in A \cap I(0, \varepsilon) \setminus \{0\},$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{ se scegliamo } n > \frac{1}{\varepsilon},\ \exists x \in A \cap I(3, \varepsilon) \setminus \{3\}.$$

Tutti gli altri punti sono isolati (vedi es. precedente).

$(C) := \{x = \frac{n-1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$
In questo caso i punti dell' insieme si addensano intorno ad 1, dimostriamo che 1 é di accumulazione: dato $\varepsilon > 0$ qualunque, si ha

$$\frac{n-1}{n} \in I(1, \varepsilon) \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} < 1 + \varepsilon.$$

La disuguaglianza di destra é sempre verificata perché $\frac{n-1}{n} < 1$, inoltre $\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon$ se $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Come negli altri esercizi si verifica facilmente che tutti gli altri punti sono isolati.

Esercizio 2
(i) $\mathbb{N}$ contiene infiniti punti isolati e nessuno di accumulazione.
(ii) Gli insiemi (A), (C) dell'esercizio 1 contengono infiniti elementi ed un solo punto di accumulazione.
(iii) $\mathbb{N} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}$.

Esercizio 3
(i) Risolvendo la disequazione otteniamo che l' insieme é equivalente all'unione dei due intervalli aperti $(-1, +1) \cup (3, 5)$ e dato che l'unione di un numero finito di aperti é un aperto, l'insieme (i) é aperto.
(ii) L' insieme non é né aperto né chiuso perché contiene l'estremo destro, 1, ma non l'estremo sinistro, 0, dato che non possiamo mai ottenere 0 come valore assunto dalla frazione $\frac{1}{n}$ per nessun valore naturale di n.

(iii) Risolvendo l'equazione troviamo che l' insieme é costituito da due punti: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, quindi é chiuso perché unione di due chiusi (un punto é chiuso perché il suo complementare é aperto!!).

(iv) L' insieme non é altro che $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, quindi é aperto.

Esercizio 4
Poiché A é limitato, si ha $\inf A > -\infty$, $\sup A < +\infty$. Per assurdo, supponiamo che $L = \sup A \notin A$, allora $\sup A \in \mathcal{CA}$ ($\mathcal{CA}$ é il complementare di A in $\mathbb{R}$), il quale deve essere aperto perché per ipotesi A é chiuso. Dalla definizine di aperto segue che esiste un intorno $I(L, r)$ tutto contenuto in $\mathcal{CA}$. Del resto dalla caratterizzazione dell'estremo superiore di un insieme segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A \colon L - \varepsilon < x < L,$$

se scegliamo $\varepsilon = r$, si avrá che $I(L, r)$ contiene elementi di A, mentre sappiamo che tale intorno deve essere tutto contenuto in $\mathcal{CA}$. Siamo arrivati ad un assurdo quindi la dimostrazione é completa.

Esercizio 5
Sia $L = \sup A$. Dalla caratterizzazione dell'estremo superiore di un insieme segue che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A \colon L - \varepsilon < x < L$. Fissiamo ε_1 e troviamo $x_1 \in A$ con $L - \varepsilon_1 < x_1 < L$. Poi fissiamo $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ e troviamo $x_2 \in A$ con $L - \varepsilon_2 < x_2 < L$. Iterando il procedimento otteniamo una sequenza di ε_i e una sequenza di x_i tali che $x_i \in I(L, \varepsilon_i)$ quindi possiamo concludere che $\forall r > 0, \exists x \in A \cap I(L, r) \setminus \{L\}$, cioé che L é di accumulazione per A.